Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2012/2013 **Blatt 7** **29.11.2012**

Aufgabe 22 *Konforme Abbildungen und metallische Ecke*

Eine analytische Funktion $f(z) = u+iv$ mit $z = x+iy = \rho e^{i\varphi}$ erfüllt die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Für die Anwendung in der Elektrostatik können konforme Abbildungen verwendet werden, um zweidimensionale Randwertprobleme mit komplizierter Geometrie auf einfache, bekannte Probleme zurückzuführen. Analytische Funktionen erzeugen konforme Abbildungen, wenn $f'(z) \neq 0$ im interessierenden Gebiet gilt.

a) Zeigen sie, dass für den Realteil $u(x,y)$ und den Imaginärteil $v(x,y)$ einer analytischen Funktion $f(z)$ die Laplace-Gleichung erfüllt ist und dass die Linien $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ senkrecht aufeinander stehen. Warum können z.B. $v(x,y)$ als Potential und $u(x,y) = \text{const.}$ als Feldlinien angesehen werden? *(1 Punkt)*

b) Ein einfaches, bekanntes Problem ist das eines unendlich großen Plattenkondensators. Die Platten sollen sich entlang der reellen Achse und der Geraden $\text{Im}z = y_1$ erstrecken. Machen Sie sich klar, dass der Imaginärteil $v(x,y)$ der Funktion $f_1(z) = c_1 z + i\phi_0$ ($c_1 \in \mathbb{R}$) das Potential, der Realteil $u(x,y)$ die Feldlinien eines Plattenkondensators beschreiben (Skizze!). Die untere Platte soll geerdet sein, die obere befindet sich auf dem Potential ϕ_1. Wie müssen ϕ_0 und c_1 gewählt werden?

Warum ist der Ansatz $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ sinnvoll, wenn beliebige Randbedingungen im oberen Halbraum zugelassen werden, auf der reellen Achse das Potential aber weiterhin verschwinden soll. Welche Eigenschaften haben die c_n?

(1 Punkt)

c) Untersuchen Sie die Eigenschaften der Abbildung

$$z' = z^{\frac{\beta}{\pi}} \quad (0 < \beta < 2\pi).$$

Wie werden insbesondere die reelle Achse, Strahlen vom Ursprung, und die Geraden $x = \text{const.}$ bzw. $y = \text{const.}$ auf die komplexe z'-Ebene abgebildet? Skizzieren Sie die Fälle $\beta < \pi$, $\beta > \pi$ und $\beta \lesssim 2\pi$.

(2 Punkte)

d) Berechnen Sie mit Hilfe des Potenzreihenansatzes aus Teilaufgabe b) das elektrostatische Potential, das elektrische Feld und die Oberflächenladungsdichte für eine geerdete leitende Ecke bzw. Kante. Diskutieren Sie das Verhalten dieser Größen in der Nähe der Ecke für verschiedene Öffnungswinkel β.

(2 Punkte)

Aufgabe 23 *Greensche Funktion bei Randbedingungen auf Kugelschalen*

Diese Aufgabe wird in Kleingruppen (3-4 Personen) bearbeitet und eine Ausarbeitung pro Gruppe schriftlich abgegeben. Abgabetermin: 6.12.2012.

Die Greensche Funktion $G_\text{D}(\vec{x}, \vec{x}')$ der Laplace-Gleichung erfüllt

$$\Delta G_\text{D}(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

und verschwindet für $\vec{x}$, $\vec{x}'$ auf den Randflächen. Es soll der Fall konzentrischer Kugelflächen mit Radien a und b als Randflächen betrachtet werden.

a) Entwickeln Sie die Greensche Funktion mit Hilfe der Vollständigkeitsrelation der $Y_{lm}(\theta, \phi)$ nach Kugelflächenfunktionen in $\vec{x}$.

b) Zeigen Sie, dass die Entwicklungskoeffizienten die Form $g_l(r, r')Y^*_{lm}(\theta', \phi')$ haben, wobei $g_l(r, r')$ die Differentialgleichung

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}[r g_l(r, r')] - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r, r') = -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r - r')$$

erfüllt.

c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung für $r \neq r'$. Konstruieren Sie damit die spezielle Lösung

$$g_l(r, r') = C\left(r^l_< - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}_<}\right)\left(\frac{1}{r^{l+1}_>} - \frac{r^l_>}{b^{2l+1}}\right)$$

die in r und r' symmetrisch ist und auf den Randflächen $r, r' = a$ und $r, r' = b$ verschwindet. Die Schreibweise $r_<$ ($r_>$) symbolisiert den kleineren (größeren) der beiden Radien r und r'.

d) Bestimmen Sie die Konstante C, indem Sie die Differentialgleichung nach Multiplikation mit r von $r = r' - \epsilon$ bis $r = r' + \epsilon$ um die Singularität integrieren ($\epsilon \to 0$). Schreiben Sie Ihr Endergebnis für $G_\text{D}(\vec{x}, \vec{x}')$ in der entwickelten Form an. Wozu ist der resultierende Ausdruck nun gut?