Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2012/2013 **Blatt 11** **10.01.2013**

Aufgabe 32 *Maxwellgleichungen und Galilei-Transformation*

Zeigen Sie, dass die Maxwellgleichungen nicht invariant sind unter der Galilei-Transformation

$$t' = t$$
$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t.$$

(1 Punkt)

Aufgabe 33 *Ebene Wellen*

Diese Aufgabe wird in Kleingruppen (3-4 Personen) bearbeitet und eine Ausarbeitung pro Gruppe schriftlich abgegeben. Abgabetermin: 17.01.2013.

Eine ebene monochromatische Welle für das elektrische Feld kann in der Form

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \frac{\vec{\mathcal{E}}}{2} e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} + \frac{\vec{\mathcal{E}}^*}{2} e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}} e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}\right]$$

geschrieben werden. Dabei ist $\vec{\mathcal{E}}$ ein komplexer Vektor mit $\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}} = 0$ und $\omega = c|\vec{k}|$. Wir betrachten die Ausbreitung der Welle im Vakuum.

a) Berechnen Sie das zugehörige $\vec{B}$-Feld und zeigen Sie, dass der Wellenvektor $\vec{k}$ senkrecht zum $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld steht. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die Energiedichte und den Poyntingvektor für die ebene Welle. Wie sehen diese Größen im zeitlichen Mittel (gemittelt über eine Periode) aus? Wann macht eine solche Mittelung Sinn? *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie den zeitgemittelten Maxwellschen Spannungstensor T für die ebene Welle. Legen Sie das Koordinatensystem so, dass sich die Welle entlang der z-Achse ausbreitet. Was bedeutet Ihr Ergebnis für die Strahlungskraft $\Delta\vec{F} = -T\cdot\Delta\vec{f}$, die die ebene Welle auf eine Absorberfläche Δf ausübt (Der Normalenvektor $\vec{n} = \Delta\vec{f}/\Delta f$ zeigt ins Innere des Absorbers)? *(1 Punkt)*

Aufgabe 34 *Abstrahlung einer linearen Antenne*

Eine dünne, lineare Antenne der Länge d mit Mittelpunkt am Ursprung erstreckt sich entlang der z-Achse. Sie wird in der Mitte von einem harmonischen Strom I der Kreisfrequenz ω gespeist. Für die Stromdichte wird die Notation

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{J}}(\vec{x}) e^{-i\omega t}\right]$$

mit der komplexen Größe $\mathcal{J}(\vec{x})$ verwendet. Analog kann von allen anderen Größen mit harmonischer Zeitabhängigkeit Orts- und Zeitanteil separiert werden, insbesondere

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{A}}(\vec{x})e^{-i\omega t}\right], \quad \vec{B}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{B}}(\vec{x})e^{-i\omega t}\right], \quad \vec{E}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{x})e^{-i\omega t}\right].$$

Die Stromdichte in der Antenne wird unter Vernachlässigung von Verlusten als

$$\vec{\mathcal{J}}(\vec{x}) = I_0 \delta(x)\delta(y)\vec{e}_z \sin\left(k\left[\frac{d}{2} - |z|\right]\right)\Theta(d/2 - |z|)$$

angenommen, wobei $k = \omega/c$.

a) Skizzieren Sie den Aufbau und die Stromverteilung in der Antenne für $kd = \pi/5$, $kd = \pi$ und $kd = 2\pi$.

b) Berechnen Sie das Vektorpotential $\vec{\mathcal{A}}(\vec{x})$ im Fernfeld ($r \equiv |\vec{x}| \gg d, k^{-1}$). Sie sollten als Ergebnis

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}) = \vec{e}_z \frac{2I_0}{ck}\frac{e^{ikr}}{r}\left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\sin^2\theta}\right]$$

erhalten.

c) Zeigen Sie, dass im Fernfeld allgemein gilt:

$$\vec{\mathcal{B}} = ik\vec{e}_r \times \vec{\mathcal{A}}, \quad \vec{\mathcal{E}} = -ik\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \vec{\mathcal{A}}).$$

Berechnen Sie damit die Felder $\vec{\mathcal{B}}(\vec{x})$ und $\vec{\mathcal{E}}(\vec{x})$. Wie sind die Felder im Bezug zur Antenne polarisiert?

d) Berechnen Sie den Poyntingvektor und damit die Strahlungsleistung pro Raumwinkelelement

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{I_0^2}{2\pi c}\left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\sin\theta}\right]^2$$

im Fernfeld. Was ergibt sich für $kd \ll 1$, $kd = \pi$, $kd = 2\pi$? Skizzieren oder plotten Sie die Abstrahlcharakteristik (am Besten in einem Polarplot) für diese Werte. Ist die Richtung maximaler Abstrahlung für beliebige Werte von kd immer senkrecht zur Antennenachse? Falls nicht, skizzieren/plotten Sie ein Gegenbeispiel.