Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2012/2013 **Blatt 13** **24.01.2013**

Aufgabe 38 *Lorentztransformation einer ebenen Welle*

Unter der Lorentzeichung $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ erfüllt das Vierervektorpotential $A^\alpha(x) = \left(\Phi(\vec{x},t), \vec{A}(\vec{x},t)\right)$ die Wellengleichung $\partial_\beta \partial^\beta A^\alpha = 0$ im Vakuum. Eine Lösung sind die ebenen Wellen im Vakuum

$$A^\alpha(x) = \mathrm{Re}\left\{a^\alpha \exp[-ik_\beta x^\beta]\right\},$$

mit $k^\alpha = \left(\omega/c, \vec{k}\right)$, beschrieben im Inertialsystem S.

a) Verwenden Sie

1. die Invarianz des Wegelementes $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ (woher kommt diese Relation?),
2. die Lorentztransformation kontravarianter Vektoren $x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta$ (warum ist der Zusammenhang linear?),

um explizit zu zeigen, dass die Phase $\phi = -k_\beta x^\beta$ der ebenen Welle in jedem Inertialsystem die gleiche Größe hat, d.h. ein Lorentzskalar ist. Warum erwartet man das?

Anleitung: Überlegen Sie sich zuerst, mit welcher Matrix sich kovariante Vektoren transformieren. Zeigen Sie dann, dass diese Matrix die Inverse von Λ^α_β ist.

(2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Frequenz ω' in einem Inertialsystem S', dass sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ entlang der x-Richtung gegenüber S bewegt. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis für verschiedene Winkel θ, die der Wellenvektor $\vec{k}$ mit $\vec{v}$ einschließt. Vergleichen Sie das Ergebnis für kleine Geschwindigkeiten (Taylorentwicklung) mit dem Dopplereffekt der Galileitransformation. *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie den Wellenvektor $\vec{k}'$ im Inertialsystem S', und zeigen Sie, dass

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)}$$

gilt, wobei θ' der Winkel zwischen $\vec{k}'$ und $\vec{v}$ ist, und die Abkürzungen $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ und $\beta = v/c$ verwendet wurden. Was bedeutet dieses Ergebnis? Was ergibt sich hier für kleine Geschwindigkeiten? *(1 Punkt)*

d) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe b) und c), indem Sie durch explizites Einsetzen die Invarianz von $k_\alpha k^\alpha$ nachrechnen. Was bedeutet diese Invarianz? *(1 Punkt)*

Aufgabe 39 *Kovariante Ausdrücke*

Diese Aufgabe wird in Kleingruppen (3-4 Personen) bearbeitet und eine Ausarbeitung pro Gruppe schriftlich abgegeben. Abgabetermin: 31.01.2013.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Feldstärketensors $F^{\alpha\beta}$, dass der Ausdruck

$$\vec{B}^2 - \vec{E}^2$$

invariant ist unter Lorentztransformationen.

Hinweis: Welchen Lorentzskalar können Sie bilden, der bilinear in $F^{\alpha\beta}$ ist?

b) Die Verallgemeinerung des vollständig antisymmetrischen Tensors in vier Dimensionen lautet

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1 & \text{falls die Indizes eine gerade Permutation von } 0,1,2,3 \text{ sind} \\ -1 & \text{falls die Indizes eine ungerade Permutation von } 0,1,2,3 \text{ sind} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Permutation ist (un)gerade, wenn eine (un)gerade Anzahl an Vertauschungen von $0,1,2,3$ zur gesuchten Reihenfolge der Indizes führt. Zeigen Sie, dass $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ein Pseudotensor 4. Stufe ist, d.h.

$$\epsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} = [\det\Lambda]\, \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \Lambda^\gamma_\xi \Lambda^\delta_\zeta \epsilon^{\mu\nu\xi\zeta}.$$

c) Zeigen Sie mit Hilfe des Ausdrucks $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\alpha\beta} F^{\gamma\delta}$, dass $\vec{E}\cdot\vec{B}$ eine lorentzinvariante Größe ist. Was bedeutet dieses Ergebnis physikalisch?