Universität des Saarlandes
Fakultät 7 – Physik und Mechatronik

Fachrichtung 7.1 – Theoretische Physik
Prof. Dr. M. Lücke,
J. Baltrusch (bis Ende Dez.'13),
Dr. M. Bienert (ab Jan.'14)
Gebäude E2 6, Zi. 4.28
http://www.qphys.uni-saarland.de/de/index.php/teaching/course/tpi_ii_la

Saarbrücken, den 16.10.2012

Übungen zur theoretischen Physik I & II

Blatt 1

Aufgabe 1 Grundlegende Rechnungen zu Gradient und Divergenz

a) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke unter Benutzung der ∇-Schreibweise.

$$\text{(i) } \operatorname{div}(\mathbf{r}), \quad \text{(ii) } \operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{r}), \quad \text{(iii) } \operatorname{grad}(r), \quad \text{(iv) } \operatorname{grad}(r^2) \quad \text{und} \quad \text{(v) } \operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}). \tag{1}$$

Dabei sei $\mathbf{r}$ ein Ortsvektor mit $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und $\mathbf{a}$ ein konstanter, d. h. nicht von $\mathbf{r}$ abhängiger Vektor. (10 Prozent)

b) Überprüfen Sie für ein Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ die Identität (2). Nutzen Sie dabei kartesische Koordinaten.

$$\nabla\times[\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})] = \nabla[\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r})] - [\nabla\cdot\nabla]\mathbf{A}(\mathbf{r}). \tag{2}$$

(5 Prozent)

c) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke für ein skalares Feld $\varphi(\mathbf{r})$ und ein Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

$$\text{(i) } \nabla\times\nabla\varphi(\mathbf{r}), \quad \text{(ii) } \mathbf{r}(t)\cdot\left[\mathbf{r}(t)\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right] \quad \text{und} \quad \text{(iii) } \nabla\cdot[\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})]. \tag{3}$$

(5 Prozent)

Aufgabe 2 Kugel- und Zylinderkoordinaten

Sei $\varphi(\mathbf{r})$ ein skalares Feld und $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ein Vektorfeld. Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke in Kugel- und Zylinderkoordinaten:

$$\text{(i) } \mathrm{d}V = \mathrm{d}^3r = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,, \quad \text{(ii) } \nabla\varphi(\mathbf{r}), \quad \text{(iii) } \nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \text{(iv) } \Delta\varphi(\mathbf{r}) = \nabla^2\varphi(\mathbf{r}). \tag{4}$$

(25 Prozent)

Aufgabe 3 Linienintegral

Berechnen Sie das Linienintegral $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ längs der Koordinatenachsen über den Weg $\mathcal{C}$, gegeben durch die Strecken $(0,0,0) \to (0,0,1) \to (0,1,1) \to (1,1,1)$ für die Felder (i) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{A} =$ const. und (ii) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times \mathbf{A}$. Falls das Integral wegunabhängig ist, geben Sie bitte ein Potential an.

(15 Prozent)

Aufgabe 4 Volumenintegral

Berechnen Sie das Volumenintegral I über das Volumen V einer Kugel mit Radius R um den Ursprung

$$I = \int_V \frac{\mathrm{d}^3 r}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \tag{5}$$

wobei $\mathbf{r}_0$ ein beliebiger Vektor ist.

(20 Prozent)

Aufgabe 5 Differenzenkoeffizient

Sei $X = \{\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \ldots, \mathbf{r}_N(t), t\}$. Zeigen Sie mit Hilfe einer Taylorentwicklung, dass

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(X)}{\mathrm{d}t} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{n=1}^{N} \dot{\mathbf{r}}_n \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_n} \right\} \mathbf{F}(X), \tag{6}$$

gilt, wobei $\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \dot{x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \dot{z} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$ ist.

(20 Prozent)