Universität des Saarlandes
Fakultät 7 – Physik und Mechatronik

Fachrichtung 7.1 – Theoretische Physik
Prof. Dr. M. Lücke,
J. Baltrusch (bis Ende Dez.'13),
Dr. M. Bienert (ab Jan.'14)
Gebäude E2 6, Zi. 4.28
http://www.qphys.uni-saarland.de/de/index.php/teaching/course/tpi_ii_la

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Saarbrücken, den 20.11.2013

Übungen zur theoretischen Physik I & II

Blatt 6

Aufgabe 20 Fourier-Transformation

Die Fouriertransformation einer quadratintegrablen Funktion $f(t)$ und ihre Rücktransformation sind definiert über

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, f(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,, \qquad\qquad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, f(\omega)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,.$$

Leiten Sie die folgenden Fourier-Transformationen her:

a) Lorentzkurve

$$\frac{2\gamma}{\omega^2+\gamma^2} \qquad \leftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{-\gamma|t|}\,, \qquad\qquad \mathrm{Re}\{\gamma\} > 0\,,$$

(10 Prozent)

b) Gaußkurve

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\gamma}\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2\gamma^2}} \qquad \leftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\gamma^2 t^2}\,, \qquad\qquad \gamma \text{ reell}$$

(10 Prozent)

c) Dirac-δ-Distribution

$$2\pi\,\delta(\omega-\Omega) \qquad \leftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\,; \qquad\qquad \Omega \text{ reell}$$

(10 Prozent)

d) Rationale Funktion mit einfacher Polstelle

$$\frac{1}{\omega-(\Omega-\mathrm{i}\gamma)} \qquad \leftrightarrow \qquad -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Omega-\mathrm{i}\gamma)t} \times \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t>0 \\ 1/2 & \text{für} \quad t=0 \\ 0 & \text{für} \quad t<0 \end{cases} \qquad \text{mit } \Omega \text{ reell und } \gamma>0.$$

Hinweis: Untersuchen Sie $t=0$ und $t\neq 0$ separat und nutzen Sie das Resultat aus Teilaufgabe a).
(10 Prozent)

Aufgabe 21 Dynamische Suszeptiblilität des gedämpften harmonischen Oszillators

Für den gedämpften, additiv angetriebenen Oszillator gilt die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t)\,,$$

mit γ, ω_0 reell und m positiv. Die dynamische Suszeptibilität $\chi(\omega)$ ist definiert durch

$$\chi(\omega) := \frac{x(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\mathrm{i}\gamma\omega}\,.$$

a) Stellen Sie $\chi(\omega)$ als Summe von Poltermen

$$\chi(\omega) = \frac{A}{\omega - \Omega_1} + \frac{B}{\omega - \Omega_2}$$

dar. Skizzieren Sie die Änderung der Lage der Pole Ω_1 und Ω_2 in der komplexen Ebene, für (i) $\gamma \to 0$ und ω_0 fest, sowie für (ii) $\omega_0 \to 0$ und γ fest. (10 Prozent)

b) Skizzieren Sie $\mathrm{Im}\,\frac{\chi(\omega)}{\chi(\omega=0)}$, $\mathrm{Re}\,\frac{\chi(\omega)}{\chi(\omega=0)}$ für ausgewählte Werte $\Gamma := \frac{\gamma}{\omega_0} > 0$. (5 Prozent)

c) Zeigen Sie, dass für die mittlere Energieabsorbtionsrate bei Antrieb mit $F(t) = f\cos(\Omega t)$ folgendes gilt:

$$\langle \dot{x}(t) F(t) \rangle = \left\langle F^2(t) \right\rangle \Omega\, \mathrm{Im}[\chi(\Omega)]\,,$$

wobei $\langle \cdot \rangle$ der Mittelwert über eine Periode des Antriebs ist.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Lösung $x(t)$. (15 Prozent)

d) Diskutieren Sie das Ergebnis aus c). Was passiert bei $\gamma \to 0$? (10 Prozent)

e) Zeigen Sie, dass Fouriertransformation von $\chi(\Omega)$

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t < 0, \\ \frac{1}{m\omega}\, e^{-\gamma t} \sin(\omega t), & \text{für } t \geq 0, \end{cases} \qquad \text{mit } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

lautet, indem Sie das Ergebnis aus 1d) nutzen.

Skizzieren Sie $\chi(t)$ für $\omega_0 > \gamma$ und $\omega_0 < \gamma$. (10 Prozent)

f) Diskutieren Sie den zeitlichen (kausalen) Zusammenhang zwischen dem Antrieb $F(t')$ und der Auslenkung

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \chi(t - t') F(t')$$

Wie ist $x(t)$ gegeben, wenn die antreibende Kraft durch $F(t) = F_0 \delta(t)$ gegeben ist (Kraftstoß)? Wie kann man $x(t)$ für beliebige antreibende Kräfte berechnen?

(10 Prozent)