# Seminar zur Vorlesung
# Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

**WS 2014/2015** **Blatt 2** **30.10.2014**

## Aufgabe 4 *Fouriertransformation*

Die Fouriertransformation einer Funktion $f(x)$ und die inverse Fouriertransformation sind definiert als

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) dk.$$

Die Fouriertransformierte $\tilde{f}(k)$ ist die spektrale Zerlegung von $f(x)$, d.h. sie gibt an mit welcher "Gewichtung" die harmonische Funktion $e^{ikx}$ in $f(x)$ vorkommt.

a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx}$ eine Darstellung der $\delta$-Funktion ist. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f(x) = e^{-a|x|} \quad (a > 0)$. *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f(x) = \cos(k_0 x)$. *(1 Punkt)*

d) Berechnen Sie die Fouriertransformierte einer Gaußfunktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2}$. *(1 Punkt)*

e) Zeigen Sie $\tilde{f}(k) = \tilde{g}(k)\tilde{h}(k)$, wenn $f(x)$ durch die Faltung $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x-y)h(y)dy$ gegeben ist. *(1 Punkt)*

f) Wie lautet die Fouriertransformierte von $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$? *(1 Punkt)*

g) Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} f(x) + \kappa f(x) = \varphi(x)$$

mit Hilfe der Fouriertransformation. Wenn Sie die Differentialgleichung transformieren erhalten Sie eine algebraische Gleichung. Lösen Sie diese und transformieren Sie das Ergebnis anschließend zurück. Denken Sie dabei an die Produktregel der Faltung. *(2 Punkte)*

## Aufgabe 5 *Kugelsymmetrische Ladungsverteilung*

Für das Potential einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung $\rho(r)$ gilt:

$$\Phi(r) = \frac{4\pi}{r} \int\limits_0^r \rho(r') r'^2 dr' + 4\pi \int_r^\infty \rho(r') r' dr' \tag{1}$$

a) Verwenden Sie $\Phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$, um Gl. (1) herzuleiten. *(1 Punkt)*

b) Wiederholen Sie die Herleitung von Gl. (1) mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes. Verwenden Sie die integrale Form, und nutzen Sie die Symmetrie der Ladungsverteilung. *(1 Punkt)*

c) Für ein Wasserstoffatom im elektronischen Grundzustand kann die Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{x}) = e\left(\delta(\vec{x}) - |\psi(\vec{x})|^2\right)$$

mit $\psi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \exp[-|\vec{x}|/a_0]$ angenommen werden. Wenden Sie Gl. (1) an, um das elektrische Potential zu berechnen. Was erhält man für $r \ll a_0$ und $r \gg a_0$? Interpretieren Sie diese Grenzfälle physikalisch. *(1 Punkt)*

d) Was ergibt sich für eine homogene Ladungsverteilung innerhalb einer Kugel mit Radius $R$? Skizzieren Sie das Potential und vergleichen Sie es mit dem Potential einer Punktladung gleicher Größe. *(1 Punkt)*