Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2014/2015 **Blatt 3** **6.11.2014**

Aufgabe 6 *Levi-Civita Tensor*

Der Levi-Civita vollständig antisymmetrische Tensor ist definiert als

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ durch zyklische Vertauschung aus } (1,2,3) \text{ hervorgeht} \\ -1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ durch zyklische Vertauschung aus } (2,1,3) \text{ hervorgeht} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit kann das Kreuzprodukt $(\vec{a}\times\vec{b})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k$ komponentenweise geschrieben werden. Zeigen Sie mit Hilfe des ϵ-Tensors

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ *(1 Punkt)*

b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ *(1 Punkt)*

c) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$ *(1 Punkt)*

Aufgabe 7 *Feldlinien*

Feldlinien sind Kurven $\vec{f}(t)$, deren Tangentenvektoren in jedem Raumpunkt $\vec{x}$ parallel zum gegebenen Feld $\vec{v}(\vec{x})$ stehen.

a) Zeigen Sie, dass die Feldlinien durch die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\vec{f}(t) = \vec{v}(\vec{f}(t))$$

bestimmt sind. Warum überkreuzen sich Feldlinien nicht? *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie die Feldlinie für das Vektorfeld

$$\vec{v}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix},$$

welche durch den Punkt $\vec{x} = (1,0,0)^T$ geht. *(1 Punkt)*

Aufgabe 8 *Einheitensysteme*

Die physikalischen Gesetze der Elektrodynamik werden durch die Maxwellgleichungen

$$\operatorname{div}\vec{E} = k_1\rho, \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0$$
$$\operatorname{rot}\vec{B} = k_2\vec{j} + k_3\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\vec{E} + k_4\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{1a}$$

und die Lorentzkraft

$$\vec{F} = q(\alpha\,\vec{E} + \beta\,\vec{v}\times\vec{B}) \tag{1b}$$

beschrieben. Die Konstanten k_1 bis k_4 und α, β werden zum Teil durch die Physik bestimmt, zum Teil sind sie willkürlich festgelegt und definieren so das verwendete Einheitensystem.

a) Allgemein ist definiert, dass der Strom I gleich der zeitlich veränderten Ladung ist. In Form der Kontinuitätsgleichung bedeutet dies, dass $\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$. Eliminieren Sie mit dieser Festlegung die Konstante k_3. *(1 Punkt)*

b) Elektromagnetische Wellen breiten sich im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit c aus. Leiten Sie aus den Maxwellgleichungen eine Wellengleichung für das $\vec{B}$-Feld ab und eliminieren Sie die Konstante k_4. *(1 Punkt)*

c) Wir betrachten nun die Konstanten α und β. Berechnen Sie mit Hilfe der Gleichungen (1) die Kraft $\vec{F}_1$ zwischen zwei Punktladungen q_1 und q_2 und die Kraft pro Länge $d\vec{F}_2/dl$ zweier paralleler mit den Strömen I_1 und I_2 durchflossener Drähte. Zeigen Sie, dass $\alpha k_1/(\beta k_2)$ die Dimension des Quadrates einer Geschwindigkeit hat. Erklären Sie, wie Sie aus den bisherigen Ergebnissen durch Experimente das Verhältnis zwischen α und β bestimmen würden. Wenn Sie das Experiment richtig durchführen, würden Sie $\alpha k_1/(\beta k_2) = c^2$ finden. *(1 Punkt)*

d) Bis auf k_1 und k_2 (und α, wofür wir 1 wählen, gemäß der üblichen Konvention, dass das elektrische Feld die Kraft auf die Einheitsladung beschreibt) sind nun alle Konstanten bestimmt. Im cgs-System mit den Grundgrößen Zentimeter, Gramm und Sekunde wird

$$k_1 = 4\pi, \quad k_2 = \frac{4\pi}{c}$$

festgelegt. Im SI-System wird

$$k_1 = \frac{1}{\epsilon_0}, \quad k_2 = \mu_0$$

gewählt ($\epsilon_0\mu_0 = c^{-2}$). Schreiben Sie die Maxwellgleichungen und die Lorentzkraft in beiden Systemen an (Im SI-System werden die Gleichungen mit $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$ und $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ schöner). Zeigen Sie, dass im cgs-System die Felder gleiche Dimension haben (welche?). *(1 Punkt)*

e) Zeigen Sie, dass die Maxwellgleichungen mit der Ersetzung

$$\vec{E} \to \sqrt{4\pi\epsilon_0}\vec{E}, \quad \vec{B} \to \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}\vec{B}, \quad \rho \to \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}\rho, \quad \vec{j} \to \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}\vec{j}$$

vom cgs- ins SI-System übergeführt werden. *(1 Punkt)*

f) Im cgs-System wird die Kraft in dyn angegeben. 1 dyn ist die Kraft, die einer Masse von 1 g die Beschleunigung 1 cm/s^2 verleiht. Wie viel Newton (N) entspricht 1 dyn? Die Einheit der Ladung im cgs-System ist 1 esE (elektrostatische Einheit). Sie wird festgelegt über das Coulombgesetz: Zwei Ladungen der Größe 1 esE erfahren im Abstand 1 cm die Kraft 1 dyn. Drücken Sie die Ladung 1 esE durch die Grundgrößen des cgs-Systems aus. *(1 Punkt)*