# Seminar zur Vorlesung
# Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

**WS 2014/2015** **Blatt 7** **03.12.2014**

## Aufgabe 15 *Mathematischer Dipol*

Die Ladungsdichte eines mathematischen Dipols ist $\rho(\vec{x}) = -\vec{p} \cdot \vec{\nabla}\delta(\vec{x})$. Zeigen Sie, dass das elektrostatische Potential und das elektrische Feld in der Form

$$\vec{\Phi}(\vec{x}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{r^3}, \quad \vec{E}(\vec{x}) = \frac{3\vec{e}_r(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) - \vec{p}}{r^3}$$

geschrieben werden können ($r = |\vec{x}|$ und $\vec{e}_r = \vec{x}/r$). *(1 Punkt)*

## Aufgabe 16 *Leitende Kugel im homogenen elektrischen Feld*

Bestimmen Sie das elektrostatische Potential einer leitenden Kugel mit Radius $a$ in einem äußeren, homogenen elektrischen Feld mit Hilfe der Spiegelladungsmethode.

a) Überlegen Sie sich, wie mit 2 Ladungen (plus Spiegelladungen) und anschließender Grenzwertbildung das Problem gelöst werden kann. Skizzieren Sie die Anordnung und tragen Sie Ladungen und Spiegelladungen (Position und Größe) ein. Welches Verhältnis muss bei der Grenzwertbildung konstant bleiben, damit sich ein endliches Feld ergibt? *(1 Punkt)*

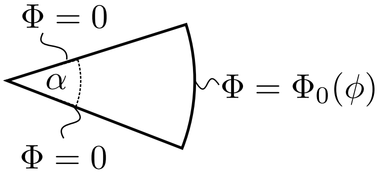
b) Bestimmen Sie das Potential $\Phi$ dieser Anordnung und führen sie den Grenzübergang aus. Verwenden Sie dazu Kugelkoordinaten (**Ergebnis:** $E_0 \cos\theta[a^3/r^2 - r]$). *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie, dass $\Phi$ als Summe des Potentials einer Punktladung, eines Dipoles und eines homogenen Feldes geschrieben werden kann. Bestimmen Sie die Größe der Punktladung, das Dipolmoment $\vec{p}$ und die Feldstärke. Wie läßt sich damit das Ergebnis aus Teil b) erklären? *(1 Punkt)*

d) Berechnen Sie die Oberflächenladungsdichte, die auf der Kugel influenziert wird. Wie ist diese auf der Kugel verteilt und wie groß ist die Gesamtladung? *(1 Punkt)*

## Aufgabe 17 *Kreisausschnitt*

Betrachtet wird folgendes Randwertproblem:




Das Potential auf den beiden Schenkeln verschwindet ($\Phi = 0$), und auf dem Kreisbogen gilt $\Phi(R, \phi) = \Phi_0(\phi)$. Zeigen Sie mit Hilfe des Verfahrens der Trennung der Variablen, dass sich das Potential im Inneren des ladungsfreien Kreisausschnittes schreiben lässt als

$$\Phi(r, \phi) = \sum_{l>0} c_l \, r^{\frac{l\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{l\pi}{\alpha}\phi\right).$$

Bestimmen Sie $c_l$. *(2 Punkte)*

**Aufgabe 18** *Selbstenergie*
Betrachten Sie eine Kugel mit homogener Ladungsdichte und berechnen Sie die elektrostatische Energie der Ladungsverteilung. Was passiert, wenn der Radius der Kugel bei gleichbleibender Gesamtladung gegen Null geht? Was bedeutet das z.B. für ein Elektron? Wenn das Elektron mit Ruheenergie $m_e c^2$ eine homogen geladene Kugel wäre, wie groß wäre sein Radius? *(1 Punkt)*

**Aufgabe 19** *Konforme Abbildungen und metallische Ecke*

Eine analytische Funktion $f(z) = u + iv$ mit $z = x + iy = \rho e^{i\varphi}$ erfüllt die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Für die Anwendung in der Elektrostatik können konforme Abbildungen verwendet werden, um zweidimensionale Randwertprobleme mit komplizierter Geometrie auf einfache, bekannte Probleme zurückzuführen. Analytische Funktionen erzeugen konforme Abbildungen, wenn $f'(z) \neq 0$ im interessierenden Gebiet gilt.

a) Zeigen sie, dass für den Realteil $u(x, y)$ und den Imaginärteil $v(x, y)$ einer analytischen Funktion $f(z)$ die Laplace-Gleichung erfüllt ist und dass die Linien $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ senkrecht aufeinander stehen. Warum können z.B. $v(x, y)$ als Potential und $u(x, y) = \text{const.}$ als Feldlinien angesehen werden? *(1 Punkt)*

b) Ein einfaches, bekanntes Problem ist das eines unendlich großen Plattenkondensators. Die Platten sollen sich entlang der reellen Achse und der Geraden $\mathrm{Im} z = y_1$ erstrecken. Machen Sie sich klar, dass der Imaginärteil $v(x, y)$ der Funktion $f_1(z) = c_1 z + i\phi_0$ ($c_1 \in \mathbb{R}$) das Potential, der Realteil $u(x, y)$ die Feldlinien eines Plattenkondensators beschreiben (Skizze!). Die untere Platte soll geerdet sein, die obere befindet sich auf dem Potential $\phi_1$. Wie müssen $\phi_0$ und $c_1$ gewählt werden?

   Warum ist der Ansatz $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ sinnvoll, wenn beliebige Randbedingungen im oberen Halbraum zugelassen werden, auf der reellen Achse das Potential aber weiterhin verschwinden soll. Welche Eigenschaften haben die $c_n$?

   *(1 Punkt)*

c) Untersuchen Sie die Eigenschaften der Abbildung

$$z' = z^{\frac{\beta}{\pi}} \quad (0 < \beta < 2\pi).$$

   Wie werden insbesondere die reelle Achse, Strahlen vom Ursprung, und die Geraden $x = \text{const.}$ bzw. $y = \text{const.}$ auf die komplexe $z'$-Ebene abgebildet? Skizzieren Sie die Fälle $\beta < \pi$, $\beta > \pi$ und $\beta \lesssim 2\pi$.

   *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie mit Hilfe des Potenzreihenansatzes aus Teilaufgabe b) das elektrostatische Potential, das elektrische Feld und die Oberflächenladungsdichte für eine geerdete leitende Ecke bzw. Kante. Diskutieren Sie das Verhalten dieser Größen in der Nähe der Ecke für verschiedene Öffnungswinkel $\beta$.

   *(2 Punkte)*