Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2014/2015 **Blatt 8** **11.12.2014**

Aufgabe 20 *Leitende Kugel im elektrischen Feld II*

In das elektrische Feld

$$\vec{E} = \frac{2q}{a^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix}$$

wird eine leitende Kugel mit Radius R gebracht, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt. Entwickeln Sie das elektrische Potential in Kugelflächenfunktionen und bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten. Berechnen Sie die Oberflächenladungsdichte, die auf der Kugel influenziert wird. *(2 Punkte)*

Hinweis: $Y_{00}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$, $Y_{10}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos(\theta)$, $Y_{20}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2(\theta)-1)$.

Aufgabe 21 *Multipolmomente von Ladungsverteilungen*

Berechnen Sie den Dipolvektor und den Quadrupoltensor folgender Ladungsverteilungen bezüglich des Ursprungs:

a) Zwei Punktladungen (Ladung q) befinden sich auf der x-Achse bei $x = \pm d$. In der Mitte dazwischen befindet sich eine weitere Punktladung $-2q$. *(1 Punkt)*

b) Eine Punktladung q befindet sich am Ursprung. In der x-y-Ebene ist die Ladung $-q$ homogen auf einem Kreisring mit Radius a um den Ursprung verteilt. *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie die Multipolmomente q_{ij} (nach Kugelflächenfunktionen) bis zur 2. Ordnung für die Ladungsverteilungen aus a) und b). *(1 Punkt)*

Aufgabe 22 *Magnetfeld eines Kreisringes*

Auf einem Kreisring mit Radius r_0 in der x-y-Ebene um den Ursprung fließt ein Strom I.

a) Leiten Sie einen Ausdruck für die Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$ in Zylinderkoordinaten ρ, φ, z und im begleitenden Dreibein $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$ und $\vec{e}_z$ ab. Wie sieht die Stromdichte in Kugelkoordinaten im entsprechenden begleitenden Dreibein aus? *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{x})$ dieser Stromverteilung und zeigen Sie, dass es auf die Form

$$\vec{A}(r,\theta) = \frac{Ir_0}{c}\,\vec{e}_\phi \int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi'\,d\phi'}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\sin\theta\cos\phi'}}$$

gebracht werden kann. **Hinweis:** Verwenden Sie Kugelkoordinaten. Da es sich um ein rotationssymmetrisches Problem handelt, wählen Sie praktischerweise $\phi = 0$ für den Aufpunkt $\vec{x}$. *(1 Punkt)*

c) Die Integration von $\vec{A}(r,\theta)$ führt auf elliptische Integrale. Für große Abstände von der Stromverteilung kann ausgenutzt werden, dass $r_0/r \ll 1$. Entwickeln Sie den Integranten bis zur ersten Ordnung in r_0/r und führen Sie dann die Integration aus. Berechnen Sie die magnetische Induktion $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$ in dieser Näherung. *(1 Punkt)*

d) Vergleichen Sie das Vektorpotential des Kreisstromes in der Näherung $r_0/r \ll 1$ mit dem Ausdruck für das Vektorpotential eines magnetischen Dipols

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\vec{m}\times\vec{x}}{|\vec{x}|^3}.$$

Was folgt daraus? *(1 Punkt)*

e) Zeigen Sie, dass

$$\vec{B}(z) = \frac{Ir_0^2}{c}\frac{2\pi}{(z^2+r_0^2)^{3/2}}\vec{e}_z$$

für beliebige Punkte auf der z-Achse ist. *(1 Punkt)*

f) Betrachten Sie eine Spule der Länge L und Windungsdichte n mit Symmetrieachse entlang der z-Achse und Spulenmittelpunkt am Ursprung. Berechnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse die magnetische Induktion

$$\vec{B}(z) = \frac{2\pi I}{c} n\vec{e}_z\,(\cos\Theta_1 + \cos\Theta_2)$$

der Spule auf der z-Achse. Hierbei ist Θ_1 (Θ_2) der Winkel zwischen der z-Achse und der Verbindungslinie von $(0,0,z)^T$ mit einem Punkt auf der äußersten Leiterschleife bei $-L/2$ ($L/2$). Was ergibt sich für $L \to \infty$? *(2 Punkte)*