Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2014/2015 **Blatt 9** **18.12.2014**

Aufgabe 23 *Magnetfeld einer rotierenden Hohlkugel*

Auf der Kugeloberfläche einer Hohlkugel mit Radius R ist die Ladung Q homogen verteilt. Die Hohlkugel dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um eine durch den Kugelmittelpunkt laufende Achse.

a) Bestimmen Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$ der Hohlkugel in Kugelkoordinaten. Zeigen Sie damit, dass die Stromdichte die Form

$$\vec{j}(\vec{x}) = \sigma(\vec{\omega} \times \vec{x})\delta(r - R)$$

hat ($r = |\vec{x}|$). Bestimmen Sie σ. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie das Vektorpotential $\vec{A}$ der rotierenden Kugel und bringen Sie Ihr Ergebnis auf die Form

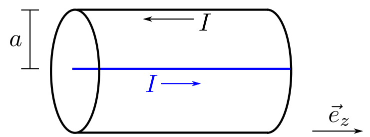
$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{Q}{3Rc}(\vec{\omega} \times \vec{x})f(r)$$

wobei innerhalb der Kugel $f(r) = 1$ und außerhalb $f(r) = R^3/r^3$ ist. *(2 Punkte)*

Hinweis: Legen Sie die z'-Achse der auftretenden Integration in Richtung des Aufpunktes $\vec{x}$.

c) Berechnen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{x})$ innerhalb und außerhalb der Kugel. Skizzieren oder plotten Sie das $\vec{B}$-Feld im gesamten Raum. *(2 Punkte)*

Aufgabe 24 *Koaxialkabel*



Durch einen langen dünnen Innenleiter eines Koaxialkabels fließt ein Wechselstrom $I = I_0 \cos(\omega t)$ und kehrt durch den Außenleiter des Koaxialkabels mit Radius a zurück.

a) Für große Abstände zum Innenleiter $s \to \infty$, gehe das elektrische Feld gegen null. Zeigen Sie, dass in diesem Fall, wenn der Beitrag des Verschiebungsstrom zum Ampèreschen Gesetz vernachlässigt wird, das induzierte elektrische Feld

$$\vec{E}(s,t) = \frac{2I_0\omega}{c^2}\sin(\omega t)\ln\left(\frac{a}{s}\right)\vec{e}_z$$

ist. *(2 Punkte)*

b) Ausgehend vom elektrischen Feld aus Aufgabe a), bestimmen Sie die Verschiebungsstromdichte $\vec{j}_d$. und den gesamten Verschiebungsstrom

$$I_d = \int \vec{j}_d \cdot d\vec{a}.$$

(1.5 Punkte)

c) Wie groß muss die Frequenz ω sein, damit der Verschiebungsstrom I_d 1% von I beträgt, wenn der äußere Zylinder einen Durchmesser von 2 mm hat? *(1 Punkt)*

Aufgabe 25 *Diffusionsgleichung des Vektorpotentials*

Variiert die magnetische Induktion nur langsam mit der Zeit, kann man die Maxwell-Gleichungen durch eine quasistatische Beschreibung nähern. In dieser Näherung kann man den Beitrag des Maxwellschen Verschiebungsstrom zum Ampèreschen Gesetz vernachlässigen. Wir betrachten diesen Fall innerhalb eines homogenen Leiters, in dem dann die folgenden Gleichungen gelten:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\mu\vec{j}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \vec{j} = \sigma\vec{E}.$$

a) Zeigen Sie, dass daraus die Diffusionsgleichung des Vektorpotentials folgt:

$$\nabla^2\vec{A} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

(In einem Leiter ist das elektrische Potential konstant.)

(1.5 Punkte)

b) Lösungen von Anfangswertproblemen der homogenen Diffusionsgleichung sind

$$\vec{A}(x,t) = \int d^3x'\ G(\vec{x} - \vec{x}', t)\vec{A}(\vec{x}', 0),$$

wobei $A(x', 0)$ die Felder zum Zeitpunt $t = 0$ beschreibt und G die Greensche Funktion des Problems ist. Lösen Sie das Anfangswertproblem, indem Sie in den Fourierraum übergehen. Zeigen Sie, dass für $t > 0$ die Greensche Funktion die Form

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\ e^{-c^2k^2t/(4\pi\mu\sigma)}e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}$$

hat. *(2.5 Punkte)*

Die Greensche Funktion der Diffusionsgleichung erfüllt

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}\nabla^2 G = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t)$$

und verschwindet für $t < 0$. Um dies zu zeigen führt man eine Fouriertransformation in Raum und Zeit durch und integriert in der komplexen Ebene um das Ergebnis von Teil a) wieder zu erhalten. Dies müssen Sie nicht beweisen, es wird Ihnen in der Übung gezeigt.

c) Zeigen Sie, dass, wenn σ und μ konstant im ganzen Raum ist, die Greensche Funktion

$$G(\vec{x}, t, \vec{x}', 0) = \Theta(t)\left(\frac{\mu\sigma}{c^2t}\right)^{3/2}\exp\left(\frac{-\mu\sigma\pi|\vec{x} - \vec{x}'|^2}{c^2t}\right)$$

ist. *(2 Punkte)*