Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2014/2015 **Blatt 10** **07.01.2015**

Dieses Übungsblatt muss *schriftlich* bearbeitet werden. Die Abgabe der Lösungen erfolgt bis spätestens Mittwoch nächste Woche um 12:00 Uhr bei Ihrer Übungsgruppenleiterin (oder im Briefkasten von Prof. Morigi im Erdgeschoss von E2 6 bzw. Frau Francois in Zimmer 4.07). Bis zu drei Personen dürfen eine gemeinsame Lösung abgeben.

Aufgabe 26 *Retardierung in der Coulomb-Eichung*

Im Gegensatz zur Lorenz-Eichung $\mathrm{div}\vec{A} + \dot{\Phi}/c = 0$ reagiert in der Coulomb-Eichung $\mathrm{div}\vec{A} = 0$ das skalare Potential *instantan* auf Änderungen der Ladungsverteilung – im (scheinbaren) Widerspruch zur speziellen Relativitätstheorie. Dieses Paradoxon soll genauer untersucht werden.

a) Leiten Sie aus den Maxwellgleichungen die Bewegungsgleichungen für das skalare Potential $\Phi(\vec{x},t)$ und das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{x},t)$ ab. Erklären Sie, warum man eine Eichfreiheit hat.

(1.5 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für $\Phi(\vec{x},t)$ und $\vec{A}(\vec{x},t)$ in beiden Eichungen. Bestimmen Sie die Lösung für $\Phi_\mathrm{C}(\vec{x},t)$ in der Coulomb-Eichung, und zeigen Sie damit, dass das skalare Potential instantan von der Ladungsdichte abhängt. (Führen Sie die transversale Stromdichte ein, um die Gleichung für $\vec{A}_\mathrm{C}(\vec{x},t)$ kompakt anschreiben zu können).

(3 Punkte)

c) Lösen Sie die Gleichungen für $\Phi_\mathrm{L}(\vec{x},t)$ und $\vec{A}_\mathrm{L}(\vec{x},t)$ in Lorenz-Eichung mit Hilfe der in der Vorlesung ermittelten Greenschen Funktion der Wellengleichung.

(2 Punkte)

d) Statt die Bewegungsgleichung für $\vec{A}_\mathrm{C}(\vec{x},t)$ direkt zu lösen, soll das Vektorpotential über die Eichfunktion $\chi(\vec{x},t)$, die Coulomb- mit Lorenz-Eichung verknüpft, bestimmt werden. Zeigen Sie, dass

$$\chi(\vec{x},t) = -\int d^3x' \frac{c}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \int\limits_0^{|\vec{x}-\vec{x}'|/c} d\tau\, \rho(\vec{x}',t-\tau) + \chi_0$$

mit einer Konstanten χ_0 gilt.

(2 Punkte)

Anleitung: Zeigen Sie zunächst, dass die Zeitableitung von χ von der Differenz $\Phi_\mathrm{L} - \Phi_\mathrm{C}$ abhängt. Lösen Sie dann diese Differentialgleichung.

e) Berechnen Sie $\vec{A}_\mathrm{C}(\vec{x},t)$ mit Hilfe von $\chi(\vec{x},t)$ und der Lösung $\vec{A}_\mathrm{L}(\vec{x},t)$. Sie sollten am Ende Ihrer Rechnung den Ausdruck

$$\vec{A}_\mathrm{C}(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\int d^3x' \left(\frac{\vec{j}(\vec{x}',t') - c\vec{e}_R\rho(\vec{x}',t')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + c^2 \frac{\vec{e}_R}{|\vec{x}-\vec{x}'|^2} \int\limits_0^{|\vec{x}-\vec{x}'|/c} d\tau\rho(\vec{x}',t-\tau) \right)$$

mit $\vec{e}_R = (\vec{x}-\vec{x}')/|\vec{x}-\vec{x}'|$ und der retardierten Zeit $t' = t - |\vec{x}-\vec{x}'|/c$ erhalten.

(2 Punkte)

f) Berechnen Sie schließlich das Feld $\vec{E}(\vec{x},t)$ mit Hilfe der Potentiale in Coulomb-Eichung. Wie klären Sie den eingangs aufgeführten Widerspruch?

Hinweis: Schreiben Sie die auftretende Ableitung nach t unter dem τ-Integral in eine Ableitung nach τ um. Führen Sie dann die Integration aus.

(3 Punkte)