Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2014/2015 **Blatt 13** **29.01.2015**

Aufgabe 30 *Antenne*

Eine dünne lineare Antenne der Länge d wird so angeregt, dass ein sinusförmiger Strom durch sie fließt. Dabei sei die Wellenlänge der Oszillation exakt so groß wie die Antenne. ($k = 2\pi/d$).

a) Zeigen Sie, dass im Fernfeld das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\hat{z}\, i \frac{2I}{c} \frac{e^{ikr}}{kr} \frac{\sin(\pi\cos(\theta))}{\sin^2(\theta)}$$

ist. *(2 Punkte)*

Hinweis: Zeigen / Benutzen Sie zunächst, dass

$$\vec{A}(\vec{x}) \simeq \frac{e^{ikr}}{c\,r} \int \vec{j}(\vec{x}') e^{-ik\hat{x}\cdot\vec{x}'} d^3x'$$

für $kr \gg 1$ und $r = |\vec{x}|$.

b) Berechnen Sie die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel. Skizzieren oder plotten Sie Ihre Lösung. *(2 Punkte)*

Aufgabe 31 *Dipolstrahlung*

In der Vorlesung wurde das Vektorpotential

$$\vec{A}(\omega_n, \vec{x}) = \vec{A}_n(\vec{x}) = \frac{e^{ik_n r}}{cr} \int \vec{j}_n(\vec{x}') d^3x'$$

der elektrischen Dipolstrahlung abgeleitet ($r = |\vec{x}|$). Hierbei ist $\vec{j}_n(\vec{x}) = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{j}(\vec{x},t)e^{i\omega_n t}dt$ der Fourierkoeffizient einer mit der Periode T oszillierenden Stromverteilung

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{j}_n(\vec{x})e^{-i\omega_n t} = \vec{j}_0(\vec{x}) + 2\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} \vec{j}_n(\vec{x})e^{-i\omega_n t}$$

wobei $\omega_n = ck_n = 2\pi n/T$ und alle anderen mit n indizierten Größen analog definiert sind.

a) Wiederholen Sie die Schritte aus der Vorlesung und bringen Sie das Vektorpotential auf die Form

$$\vec{A}_n(\vec{x}) = -ik_n\vec{p}_n \frac{e^{ik_n r}}{r},$$

indem Sie die Stromdichte $\vec{j}_n$ mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung durch die Ladungsdichte ρ_n ausdrücken. Die Größe $\vec{p}_n$ ist das Dipolmoment der Ladungsverteilung. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass $\vec{B}_n = \mathrm{rot}\vec{A}_n$ den Ausdruck

$$\vec{B}_n = k_n^2(\vec{e}_r \times \vec{p}_n)\frac{e^{ik_n r}}{r}\left(1 - \frac{1}{ik_n r}\right)$$

ergibt. *(2 Punkte)*

c) Beweisen Sie, dass das elektrische Feld im quellfreien Bereich über $\vec{E}_n = \frac{i}{k_n}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A}_n$ mit dem Vektorpotential zusammenhängt. Berechnen Sie $\vec{E}_n$ und bringen Sie es auf die Form

$$\vec{E}_n = k_n^2[(\vec{e}_r \times \vec{p}_n) \times \vec{e}_r]\frac{e^{ik_n r}}{r} + [3\vec{e}_r(\vec{e}_r\vec{p}_n) - \vec{p}_n]\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik_n}{r}\right)\frac{e^{ik_n r}}{r}.$$

(3 Punkte)

Hinweis: Wenn Sie die doppelte Rotation mit dem ϵ-Tensor berechnen, zeigen Sie zunächst, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{e^{ikr}}{r} = -k^2\frac{e^{ikr}}{r}\frac{x_l}{r}\frac{x_m}{r} + \left[\delta_{lm} - 3\frac{x_l}{r}\frac{x_m}{r}\right]\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{e^{ikr}}{r}.$$

d) Diskutieren Sie die Eigenschaften des $\vec{E}_n$- und $\vec{B}_n$-Feldes im Nahfeld und im Fernfeld. Skizzieren oder plotten Sie die Felder. *(2 Punkte)*

e) Berechnen Sie die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel. Zeigen Sie, dass die totale abgestrahlte Leistung

$$P_n = \frac{ck^4}{3}|\vec{p}_n|^2$$

ist. *(2 Punkte)*