Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2014/2015 **Blatt 14** **04.02.2015**

Dieses Übungsblatt muss *schriftlich* bearbeitet werden. Die Abgabe der Lösungen erfolgt bis spätestens Freitag, den 13.02. um 16:00 Uhr im Briefkasten von Prof. Morigi im Erdgeschoss von E2 6. Bis zu drei Personen dürfen eine gemeinsame Lösung abgeben.

Aufgabe 32 *Maxwellgleichungen und Galilei-Transformation*

Zeigen Sie, dass die Maxwellgleichungen nicht invariant sind unter der Galilei-Transformation

$$t' = t$$
$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t.$$

(1 Punkt)

Aufgabe 33 *Lorentztransformation einer ebenen Welle*

Unter der Lorentzeichung $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ erfüllt das Vierervektorpotential $A^\alpha(x) = \left(\Phi(\vec{x},t), \vec{A}(\vec{x},t)\right)$ die Wellengleichung $\partial_\beta \partial^\beta A^\alpha = 0$ im Vakuum. Eine Lösung sind die ebenen Wellen im Vakuum

$$A^\alpha(x) = \mathrm{Re}\left\{a^\alpha \exp[-ik_\beta x^\beta]\right\},$$

mit $k^\alpha = \left(\omega/c, \vec{k}\right)$, beschrieben im Inertialsystem S.

a) Verwenden Sie

1. die Invarianz des Wegelementes $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ (woher kommt diese Relation?),
2. die Lorentztransformation kontravarianter Vektoren $x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta$ (warum ist der Zusammenhang linear?),

um explizit zu zeigen, dass die Phase $\phi = -k_\beta x^\beta$ der ebenen Welle in jedem Inertialsystem die gleiche Größe hat, d.h. ein Lorentzskalar ist. Warum erwartet man das?

Anleitung: Überlegen Sie sich zuerst, mit welcher Matrix sich kovariante Vektoren transformieren. Zeigen Sie dann, dass diese Matrix die Inverse von Λ^α_β ist.

(3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Frequenz ω' in einem Inertialsystem S', dass sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ entlang der x-Richtung gegenüber S bewegt. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis für verschiedene Winkel θ, die der Wellenvektor $\vec{k}$ mit $\vec{v}$ einschließt. Vergleichen Sie das Ergebnis für kleine Geschwindigkeiten (Taylorentwicklung) mit dem Dopplereffekt der Galileitransformation. *(3 Punkte)*

c) Berechnen Sie den Wellenvektor $\vec{k}'$ im Inertialsystem S', und zeigen Sie, dass

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)}$$

gilt, wobei θ' der Winkel zwischen $\vec{k}'$ und $\vec{v}$ ist, und die Abkürzungen $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ und $\beta = v/c$ verwendet wurden. Was bedeutet dieses Ergebnis? Was ergibt sich hier für kleine Geschwindigkeiten? *(2 Punkte)*

d) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe b) und c), indem Sie durch explizites Einsetzen die Invarianz von $k_\alpha k^\alpha$ nachrechnen. Was bedeutet diese Invarianz? *(2 Punkte)*

Aufgabe 34 *Kovariante Ausdrücke*

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Feldstärketensors $F^{\alpha\beta}$, dass der Ausdruck

$$\vec{B}^2 - \vec{E}^2$$

invariant ist unter Lorentztransformationen. *(2 Punkte)*

Hinweis: Welchen Lorentzskalar können Sie mit $F^{\alpha\beta}$ bilden? Denken Sie an eine Bilinearform.

b) Die Verallgemeinerung des vollständig antisymmetrischen Tensors in vier Dimensionen lautet

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1 & \text{falls die Indizes eine gerade Permutation von } 0,1,2,3 \text{ sind} \\ -1 & \text{falls die Indizes eine ungerade Permutation von } 0,1,2,3 \text{ sind} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Permutation ist (un)gerade, wenn eine (un)gerade Anzahl an Vertauschungen von $0,1,2,3$ zur gesuchten Reihenfolge der Indizes führt. Zeigen Sie, dass $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ein Pseudotensor 4. Stufe ist, d.h.

$$\epsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} = [\det\Lambda]\, \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \Lambda^\gamma_\xi \Lambda^\delta_\zeta \epsilon^{\mu\nu\xi\zeta}.$$

(2 Punkte)

c) Zeigen Sie mit Hilfe des Ausdrucks $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}$, dass $\vec{E}\cdot\vec{B}$ eine lorentzinvariante Größe ist. Was bedeutet dieses Ergebnis physikalisch?

(2 Punkte)

Aufgabe 35 *Gleichförmig bewegter elektrischer Dipol*

Im Ruhesystem (IS) eines Dipols $\vec{p}$ ist das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \frac{3\vec{e}_r(\vec{p}\cdot\vec{e}_r) - \vec{p}}{r^3}$$

a) Berechnen Sie die elektromagnetischen Felder in einem Inertialsystem IS′, das sich bezüglich IS mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ bewegt.

Hinweis: Verwenden Sie explizit die Transformationsmatrix für einen Lorentz-Boost in x-Richtung, um den Feldstärketensor oder die elektromagnetischen Potentiale zu transformieren. *(3 Punkte)*

b) Drücken Sie die Felder in den Koordinaten $\vec{x}'$ und $t' = 0$ des IS′ aus. *(2 Punkte)*

c) Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus Teil b) und betrachten Sie die Fälle $\vec{p} = p\vec{e}_z$ und $\vec{p} = p\vec{e}_x$. Wie unterscheiden sich die Felder in IS und IS′? Diskutieren Sie Ihr Ergebnis. *(2 Punkte)*