Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik IV

WS 2016/2017 **Blatt 10** **14.01.2016**

Aufgabe 23 *Zustandsgleichung des Bose Gases*

Leiten Sie die Zustandsgleichung $PV = Nk_BT$ für das Bose Gas im Grenzfall großer Volumina $V/\lambda^3 \to \infty$ her. Hierbei ist $\lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/(mk_BT)}$ die thermische Wellenlänge. Sie dürfen verwenden, dass

$$\frac{P}{k_BT} = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \frac{1}{V}\ln(1-z), \tag{1}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{1}{V}\frac{z}{1-z}, \tag{2}$$

mit dem Druck P, der Temperatur T und $v = V/N$. Die Funktion $g_n(z)$ ist der Polylogarithmus, der durch folgende Reihendarstellung gegeben ist

$$g_n(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^n}. \tag{3}$$

(1 Punkt)

Aufgabe 24 *Thermodynamische Funktionen des Bose Gases*

Im Folgenden sollen thermodynamischen Funktionen des idealen Bose Gases hergeleitet werden. Die Zustandsgleichung im Grenzwert großer Volumina ist hierbei gegeben durch

$$\frac{P}{k_BT} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z), & (T > T_c), \\ \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(1), & (T < T_c), \end{cases} \tag{4}$$

mit der kritischen Temperatur T_c unterhalb derer Kondensation auftritt. Die Fugazität wird hierbei für $\lambda^3/v < g_{3/2}(1)$ durch die Nullstelle der Gleichung

$$\frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(z) \tag{5}$$

definiert. Für $\lambda^3/v > g_{3/2}(1)$ ist $z = 1$. Des Weiteren ist Gl. (5) äquivalent zu

$$\frac{g_{3/2}(z)}{g_{3/2}(1)} = \left(\frac{T_c}{T}\right)^{3/2}. \tag{6}$$

a) Leiten Sie her, dass die innere Energie U folgende Form annimmt

$$\frac{U}{N} = \begin{cases} \frac{3}{2}\frac{kTv}{\lambda^3} g_{5/2}(z), & (T > T_c) \\ \frac{3}{2}\frac{kTv}{\lambda^3} g_{5/2}(1), & (T < T_c) \end{cases} \tag{7}$$

(1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass $g_{n-1}(z) = z\frac{\partial}{\partial z}g_n(z)$. Zeigen Sie daraufhin mithilfe der Gleichungen (5) und (6), dass die Ableitung der Fugazität nach der Temperatur folgende Relation erfüllt (Tipp: Verwenden Sie die Ableitung inverser Funktionen)

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial T} = -\frac{3}{2}\frac{\lambda^3}{Tv}\frac{1}{g_{1/2}(z)} = -\frac{3}{2}\frac{1}{T}\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}. \tag{8}$$

(1 Punkt)

c) Bestimmen Sie mithilfe von Gleichungen (7) und (8) die spezifische Wärme bei konstantem Volumen C_V. Das Ergebnis ist hierbei gegeben durch

$$\frac{C_V}{Nk_B} = \begin{cases} \frac{15}{4}\frac{v}{\lambda^3}g_{5/2}(z) - \frac{9}{4}\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}, & (T > T_c), \\ \frac{15}{4}\frac{v}{\lambda^3}g_{5/2}(1), & (T < T_c). \end{cases} \tag{9}$$

(2 Punkte)

d) Betrachten Sie den Grenzwert $T \to \infty$ und zeigen Sie, dass $\frac{C_V}{Nk_B} \to \frac{3}{2}$. *(1 Punkt)*

e) Betrachten Sie nun tiefe Temperaturen $T \to 0$ und zeigen Sie, dass $\frac{C_V}{Nk_B} \propto T^{3/2}$. *(1 Punkt)*

f) Wir wollen nun die Diskontinuität in der Ableitung der spezifischen Wärme bei $T = T_c$ untersuchen. Bestimmen Sie hierzu die Ableitungen der spezifischen Wärme für $T < T_c$ und $T > T_c$ und zeigen Sie, dass

$$\left(\lim_{T->T_c^+}\frac{\partial}{\partial T}\frac{C_V}{Nk_B}\right) - \left(\lim_{T->T_c^-}\frac{\partial}{\partial T}\frac{C_V}{Nk_B}\right) = -\frac{27}{16\pi}\frac{\zeta(3/2)^2}{T_c} \approx -\frac{3.66}{T_c} \tag{10}$$

mit der Riemannschen Zeta Funktion $\zeta(n)$. *(3 Punkte)*

Hinweis: Die Polylogarithmen g_n haben einen wohldefinierten Grenzwert für $z \to 1^-$ für $n > 1$ wohingegen $g_{1/2}(z)$ und $g_{-1/2}(z)$ im Grenzwert gegen 1^- divergieren. Für $n > 1$ gilt für den Wert der Polylogarithmen bei $z = 1$ folgende Relation

$$g_n(1) = \zeta(n), \quad n > 1. \tag{11}$$

mit der Riemannschen Zeta Funktion ζ. Des Weiteren darf folgender Grenzwert in der Rechnung verwendet werden

$$\lim_{z\to 1^-}\frac{g_{1/2}^3(z)}{g_{-1/2}(z)} = 2\pi. \tag{12}$$

Aufgabe 25 *Bose Gas in zwei Dimensionen*

a) Berechnen Sie den Logarithmus der großkanonischen Zustandssumme in dem Grenzfall

$$\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\ln\mathcal{Q}(z,V,T) = \frac{1}{\lambda^3}g_2(z) \tag{13}$$

indem Sie folgende Integraldarstellung von $\ln \mathcal{Q}$ für große Volumina verwenden

$$\ln \mathcal{Q} = -\frac{2\pi L^2}{h^2} \int_0^\infty p \ln(1 - z e^{-\beta \epsilon_p}) \tag{14}$$

wobei $V = L^2$ die dem System zur Verfügung stehende Fläche darstellt. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie die mittlere Anzahl an Teilchen pro Flächeneinheit als Funktion von z und T. *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie, dass im Fall eines zweidimensionales Bose-Gas keine Bose-Einstein Kondensation stattfinden kann und begründen Sie das Resultat ihrer Rechnung physikalisch. *(4 Punkte)*

Hinweis: Zeigen Sie, dass das Integral für N divergiert, wenn sich die Fugazität z dem Wert 1 annähert.