Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik IV

WS 2016/2017 **Blatt 11** **20.01.2016**

Aufgabe 29 *Boltzmann-Gleichung ohne Stöße*

Die Verteilungsfunktion $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ ohne Stoßterme erfüllt die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, das die Zeitentwicklung der Verteilungsfunktion $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ durch

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)) \tag{2}$$

gegeben ist. Dabei ist $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ die Verteilungsfunktion zur Zeit $t = 0$, und $(\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t))$ ist derjenige Punkt im Phasenraum, in dem ein Teilchen zur Zeit $t = 0$ starten muss, um zur Zeit t den Punkt $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ zu erreichen. *(1 Punkt)*

b) Gegeben sei die zweidimensionale Verteilungsfunktion

$$f_0(x, v) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_v} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(v-\bar{v})^2}{2\sigma_v^2}\right]. \tag{3}$$

Berechnen Sie die Zeitentwicklung dieser Verteilungsfunktion für den Fall eines freien Teilchens, d.h. $F = 0$, und diskutieren Sie ihr Ergebnis. *(1 Punkt)*

Aufgabe 30 *Boltzmann-Gleichung mit geschwindigkeitsabhängigen Kräften*

Bei der Herleitung der Boltzmann-Gleichung wird verwendet, dass das Volumenelement im Phasenraum (in erster Ordnung in $\mathrm{d}t$) invariant ist. Um dies zu zeigen wurde angenommen, dass die äußeren Kräfte auf die Teilchen *nicht* von der Geschwindigkeit abhängen. Ziel dieser Aufgabe ist es zu untersuchen, wie die Boltzmanngleichung zu modifizieren ist, falls die Kräfte von der Geschwindigkeit abhängen.

a) Zeigen Sie, dass im Fall von geschwindigkeitsabhängigen Kräften

$$\mathrm{d}^3x'\,\mathrm{d}^3v' = \left(1 + \frac{1}{m}\sum_i \frac{\partial F_i}{\partial v_i}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3v + \mathcal{O}(\mathrm{d}t^2) \tag{4}$$

gilt. *(2 Punkte)*

b) Wie muss demnach die Boltzmanngleichung für geschwindigkeitsabhängige Kräfte modifiziert werden? *(1 Punkt)*

c) Was bedeutet das für die Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{5}$$

und für eine Dämpfungskraft

$$\mathbf{F} = -m\gamma\mathbf{v}? \tag{6}$$

(2 Punkte)

d) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass im kräftefreien Fall die stationäre Lösung der Boltzmanngleichung durch

$$f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = n\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\mathbf{v}^2}{2k_B T}} \tag{7}$$

mit der konstanten Dichte n gegeben ist. Zeigen Sie, dass das immer noch die stationäre Lösung der Boltzmanngleichung ist, wenn ein (ortsabhängiges) Magnetfeld vorhanden ist. *(1 Punkt)*

Aufgabe 31 *Erhaltung der Teilchenzahl*

a) Betrachten Sie ein Ensemble mit einem ein chemisches Potential μ. Die freie Energie ändert sich um $\mu \mathrm{d}N$, wenn sich die Teilchenzahl um $\mathrm{d}N$ ändert, wobei Temperatur T und Volumen V konstant bleiben. Hieraus folgt

$$\mathrm{d}A = -P\mathrm{d}V - S\mathrm{d}T + \mu\mathrm{d}N \tag{8}$$

und das chemische Potential folgt aus der Maxwell-Relation

$$\mu = \left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)\bigg|_{V,T}. \tag{9}$$

Bestimmen Sie aus der Zustandssumme des idealen Gases

$$Q_N = \frac{1}{h^{3N}N!}\int \mathrm{d}p\,\mathrm{d}\,q \exp\left[-\beta\sum_{i=1}^{N} p_i^2/(2m)\right], \quad \lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/(mk_BT)} \tag{10}$$

die freie Energie A und das chemische Potential μ. Die Ergebnisse lauten

$$A = -k_BTN\left[\ln\left(\frac{V}{N\lambda^3}\right) + 1\right], \tag{11}$$

$$\mu = k_BT\ln(\lambda^3 n), \tag{12}$$

mit der Dichte n. *(1 Punkt)*

b) In einem abgeschlossenen System ist klassisch die Anzahl an Teilchen eine Erhaltungsgröße. Das chemische Potential kann dann als Lagrangemultiplikator angesehen werden. Dieser Erhaltungssatz hat seinen Ursprung in der Erhaltung der Baryonenzahl, womit gemeint ist, dass sich die Anzahl an Baryonen minus die Anzahl an Antibaryonen in einem abgeschlossenen System nicht ändert. Baryonen sind Teilchen, die aus drei Quarks bestehen. Sie besitzen einen Spin von 1/2, sind demnach Fermionen, und zu ihnen zählen z.B. Protonen und Neutronen. Ein Proton kann dann beispielsweise gemeinsam mit einem Antiproton erzeugt oder vernichtet werden. Bei niedrigen Temperaturen ist die thermische Energie zu gering um Baryonenpaare zu erzeugen. Des Weiteren ist der Anteil der Antimaterie im beobachtbaren Universum vernachlässigbar gering. Deshalb ist die Anzahl an Protonen und Neutronen bei nicht zu hohen Temperaturen in guter Näherung konstant.

Ähnliches gilt für Elektronen. Hier ist die Anzahl an Elektronen minus die Anzahl an Positronen eine Erhaltungsgröße. Beispielsweise laufen im Inneren von Sternen Reaktionen ab, in denen Elektronen und Positronen paarweise vernichtet werden und Gammastrahlung erzeugen. Hierbei wird ein Gleichgewicht zwischen Elektronen, Positronen und elektromagnetischer Strahlung hergestellt.

Wollen wir Materie bei sehr hohen Temperaturen beschreiben, müssen wir Paarerzeugungs- und Vernichtungsprozesse berücksichtigen. Wir wollen zunächst ein Ensemble von Elektronen und Positronen betrachten. Der Hamiltonian ist dann gegeben durch

$$H = H_1 + H_2 - \mu(N_1 - N_2). \tag{13}$$

Hierbei beziehen sich die Indizes 1 und 2 auf Teilchen, bzw Antiteilchen. Des Weiteren ist μ der Lagrangemultiplier, der es uns erlaubt, N_1 und N_2 frei zu variieren. Die großkanonische Zustandssumme ist dann gegeben durch

$$\mathcal{Q} = \sum_{N_1=0}^{\infty} \sum_{N_2=0}^{\infty} \exp[-\beta(A_{N_1} + A_{N_2} - \mu(N_1 - N_2)]. \tag{14}$$

Wir verzichten im Folgenden zur einfacheren Illustration auf eine relativistische Behandlung der Teilchenimpulse und approximieren die Energie eines Teilchens als

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = mc^2 + \frac{p^2}{2m}. \tag{15}$$

Hierbei ist es jedoch wichtig, die Ruheenergie des Teilchens zu berücksichtigen, da diese in Energie umgewandelt werden kann. Verwenden Sie nun die freie Energie aus Aufgabenteil (a), berechnen Sie die Gleichgewichtsbedingungen

$$k_B T \ln(\lambda^3 n_1) + mc^2 = \mu, \tag{16}$$

$$k_B T \ln(\lambda^3 n_2) + mc^2 = -\mu \tag{17}$$

und folgern Sie

$$\lambda^6 n_1 n_2 = e^{-2mc^2/(k_B T)}. \tag{18}$$

Schätzen Sie die Größenordnung der rechten Seite im Falle von Elektronen und Protonen ab. Was folgt für n_1 und n_2? *(2 Punkte)*

c) Ein Ensemble von freien Protonen und Neutronen mit Spin-$\frac{1}{2}$ sei nun in einer Box mit Volumen V eingeschlossen. Die Energie eines einzelnen Nukleons mit zugehörigem Impuls p ist dann gegeben durch

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = \frac{p^2}{2m} + mc^2 \tag{19}$$

mit einer Ruheenergie von $mc^2 \approx 1000\,\mathrm{MeV}$.

Nehmen Sie zunächst einmal an, die Zahl an Nukleonen sei keine Erhaltungsgröße. Was folgt hieraus für den Wert der Fugazität z? Berechnen Sie unter dieser Annahme die Zustandssumme $\mathcal{Q}$ des Nukleonensystems (Fermi Statistik verwenden!) bei einer Temperatur T. *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie die mittlere Energiedichte $\frac{U}{V}$. *(1 Punkt)*

e) Berechnen Sie die mittlere Teilchendichte $\frac{\langle N \rangle}{V} = \frac{1}{v}$. *(1 Punkt)*

f) Diskutieren Sie die Notwendigkeit eines Erhaltungssatzes für die Teilchenzahl der Nukleonen im Lichte der vorhergehenden Berechnungen. *(2 Punkte)*