

Übung zur Vorlesung Theoretische Physik IV

WS 2016/2017

Blatt 12

27.01.2016

Aufgabe 32 *Zweidimensionales Quantengas im Magnetfeld*

Wir betrachten ein ideales Gas aus Fermionen mit Spin-1/2 in zwei Dimensionen, z.B. Elektronen auf einer Oberfläche. Mit einem Spin verbunden ist ein magnetisches Moment μ . In einem konstanten Magnetfeld H haben die Teilchen daher neben ihrer kinetischen Energie noch die Energie $\pm\mu H$.

- a) Berechnen Sie die mittlere Anzahl an Teilchen, deren Spin parallel bzw. antiparallel zum Magnetfeld ist. Wie groß ist demzufolge das gesamte magnetische Moment M des Systems? (1 Punkt)
- b) Berechnen Sie die magnetische Suszeptibilität

$$\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial H} \right|_{H=0} \quad (1)$$

und bringen Sie diese auf die Form

$$\chi = \chi_0 \left(1 - e^{\frac{\epsilon_F}{k_B T}} \right), \quad (2)$$

wobei ϵ_F die Fermi-Energie des Systems ohne Magnetfeld ist. (2 Punkte)

Hinweis: Sie müssen die Fugazität z eliminieren. Dies geht bei zweidimensionalen Systemen immer, sogar in Anwesenheit eines Magnetfelds.

Aufgabe 33 *Photonengas*

Die Quantentheorie der Strahlung besagt, dass Photonen masselose Bosonen mit einem Spin von \hbar sind. Da die Photonen keine Masse besitzen, bewegen sie sich immer mit einer Geschwindigkeit von c im freien Raum. Des Weiteren folgt hieraus, dass der Spin eines Photons nur zwei unabhängige Richtungen besitzt: parallel oder antiparallel zum Impuls. Befindet sich ein Photon in einem wohldefinierten Spineigenzustand, so entspricht es einer ebenen elektromagnetischen Welle, die entweder rechts-, oder linkszirkular polarisiert ist. Jedoch können wir aus der linearen Superposition dieser zwei Zustände einen Photonenzustand erzeugen, der linear polarisiert ist (jedoch kein Eigenzustand des Spinoperators mehr ist). Im Folgenden betrachten wir linear polarisierte Photonen. Diese besitzen die folgenden Eigenschaften:

- Energie = $\hbar\omega$,
- Impuls = $\hbar\mathbf{k}$, $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}$,
- Polarisationsvektor = $\boldsymbol{\epsilon}$, $|\boldsymbol{\epsilon}| = 1$, $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$.

Ein derartiges Photon kann einem elektrischen Feld der folgenden Form zugeordnet werden

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\epsilon} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (3)$$

Die Richtung des Polarisationsvektors $\boldsymbol{\epsilon}$ entspricht dabei der Richtung des elektromagnetischen Feldes und die Bedingung $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k} = 0$ ist eine Konsequenz der Transversalität des Elektrischen Feldes, d.h. $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Für ein gegebenes \mathbf{k} gibt es also nur zwei unabhängige Polarisationsvektoren $\boldsymbol{\epsilon}$. Setzen wir periodische Randbedingungen in einem Würfel des Volumens $V = L^3$ an, so erhalten wir die folgenden erlaubten Werte von \mathbf{k} :

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi\mathbf{n}}{L}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3. \quad (4)$$

Die Anzahl an erlaubten Impulswerten zwischen k und $k + dk$ ist daher

$$\frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk. \quad (5)$$

Da Atome Photonen absorbieren und emittieren können, ist die Anzahl an Photon keine Erhaltungsgröße. Die Gesamtenergie des Zustandes des elektromagnetischen Feldes, in dem $n_{\mathbf{k},\boldsymbol{\epsilon}}$ Photonen mit Impuls \mathbf{k} und Polarisationsrichtung $\boldsymbol{\epsilon}$ vorhanden sind, ist durch folgende Formel gegeben

$$E\{n_{\mathbf{k},\boldsymbol{\epsilon}}\} = \sum_{\mathbf{k},\boldsymbol{\epsilon}} \hbar\omega n_{\mathbf{k},\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (6)$$

mit

$$\omega = c|\mathbf{k}|, \quad n_{\mathbf{k},\boldsymbol{\epsilon}} \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Da die Anzahl an Photonen nicht festgelegt ist, ist die Zustandssumme gegeben durch

$$\mathcal{Q} = \sum_{\{n_{\mathbf{k},\boldsymbol{\epsilon}}\}} e^{-\beta E\{n_{\mathbf{k},\boldsymbol{\epsilon}}\}} \quad (8)$$

mit keiner Einschränkung an $\{n_{\mathbf{k},\boldsymbol{\epsilon}}\}$.

a) Zeigen Sie, dass die Zustandssumme durch

$$\mathcal{Q} = \prod_{\mathbf{k},\boldsymbol{\epsilon}} \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \quad (9)$$

gegeben ist und zeigen Sie, dass die mittlere Photonenzahl für Photonen mit Wellenvektor \mathbf{k} und beliebiger Polarisation den Wert

$$\langle n_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{2}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \quad (10)$$

annimmt.

(1 Punkt)

b) Leiten Sie die Zustandsgleichung

$$3PV = U \quad (11)$$

her. Verwenden Sie hierbei, dass $U = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln \mathcal{Q}$ und dass $P = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \ln \mathcal{Q}$. (1 Punkt)

- c) Bestimmen Sie die innere Energie U im Grenzwert " $V \rightarrow \infty$ " und zeigen Sie, dass

$$\frac{U}{V} = \int_0^\infty d\omega u(\omega, T) \quad (12)$$

mit

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}. \quad (13)$$

sowie

$$\frac{U}{V} = \frac{\pi^2}{15} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3}. \quad (14)$$

Hinweis: Verwenden Sie die geometrische Reihe. Sie dürfen verwenden, dass $\sum_{n=1}^\infty n^{-4} = \zeta(4) = \pi^4/90$ gilt. (1 Punkt)

- d) Bestimmen Sie die spezifische Wärme pro Volumeneinheit c_V und diskutieren Sie die Grenzwerte $T \rightarrow \infty$ und $T \rightarrow 0$. (1 Punkt)
- e) Argumentieren Sie, warum im Falle von Photonen keine Bose-Einstein Kondensation auftreten kann. (1 Punkt)