Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik IV

WS 2016/2017 **Blatt 13** **03.02.2017**

Aufgabe 34 *Klassische Thermodynamik eines dünnen Gases*

Aus der kräftefreien Boltzmanngleichung folgt, dass die Gleichgewichtsverteilung eines Gases geringer Dichte durch die Maxwell-Boltzmann Verteilung beschrieben mit

$$f_0(\mathbf{p}) = \frac{n}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} e^{-(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)^2/(2mk_BT)} \tag{1}$$

mit der Dichte n, dem Impuls $\mathbf{p}$, der Teilchenmasse m, der Temperatur T, dem mittleren Impuls $\mathbf{p}_0$ und der Boltzmann Konstanten k_B. Sie beschreibt die Wahrscheinlichkeitsdichte ein Molekül mit Impuls $\mathbf{p}$ in dem Gas unter Gleichgewichtsbedingungen zu finden. Die Temperatur ist hierbei durch

$$\epsilon = \frac{3}{2} k_B T, \tag{2}$$

definiert mit der mittleren Energie eines Teilchens ϵ und für die innere Energie U gilt

$$U(T) = \frac{3}{2} N k_B T. \tag{3}$$

Das erste Gesetz der Thermodynamik nimmt dann folgende Form an

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + P\mathrm{d}V, \tag{4}$$

mit der vom System absorbierten Wärmemenge Q, dem Druck P und dem Volumen V.

a) Das Analogon zum zweiten Gesetz der Thermodynamik ist durch Boltzmanns H-Theorem gegeben, das besagt

$$H = -\frac{S}{V k_B}, \tag{5}$$

mit der Entropie des idealen Gases S. Es sagt aus, dass die Entropie bei konstantem Volumen nicht abnehmen kann. Berechnen Sie H im Gleichgewicht! Verwenden Sie, dass

$$H_0 = \int \mathrm{d}^3p\, f_0(p) \ln f_0(p). \tag{6}$$

(1 Punkt)

b) Verwenden Sie die Zustandsgleichung und zeigen Sie, dass

$$-k_B V H_0 = \frac{3}{2} N k_B \ln(PV^{5/2}) + \text{konst.} \tag{7}$$

Folgern Sie, dass $\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q/T$, wobei S durch Gl. (5) gegeben ist. *(1 Punkt)*

Aufgabe 35 *Boltzmann-Gleichung im Schwerefeld*

Wir betrachten nun die Boltzmann-Gleichung in einem konservativen Kraftfeld der Form

$$\mathbf{F} = -\nabla\phi(\mathbf{r}). \tag{8}$$

a) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_0(\mathbf{p}) e^{-\phi(\mathbf{r})/(k_B T)} \tag{9}$$

eine stationäre Lösung der Boltzmann-Gleichung darstellt. *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie für das Potential des Schwerefelds der Erde $\phi(z) = mgz$ mit der Teilchenmasse m, der Gravitationskonstanten g und der Höhendifferenz z die Teilchendichte $n(z)$! *(1 Punkt)*

Aufgabe 36 *Magnetismus in der klassischen Mechanik*

In dieser Aufgabe betrachten wir die Außwirkungen eines äußeren Magnetfelds auf eine makroskopische Materialprobe im thermischen Gleichgewicht unter Verwendung der klassischen Mechanik. Das Material setzte sich aus Elektronen und Atomkernen zusammen. Der Hamiltonoperator ist dann gegeben durch

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{[\mathbf{p}_i - e_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i)]^2}{2m_i} + \sum_{i=1}^{N} V(\mathbf{r}_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \tag{10}$$

mit den Impulsen $\mathbf{p}_i$, den elektrischen Ladungen e_i, den Teilchenmassen m_i, dem Wechselwirkungspotential zwischen Teilchen W, einem äußeren Potential $V(\mathbf{r})$ und einem elektromagnetischen Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

a) Die Probe befinde sich nun in einem homogenen äußeren Magnetfeld. Verwenden Sie das kanonische Ensemble, bestimmen Sie das Volumenelement und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Teilchenpositionen $\mathbf{r}_i$ und die Teilchengeschwindigkeiten $\mathbf{v}_i$. Beachten Sie, dass der Impuls $\mathbf{p}_i$ keine Observable ist und dass die Geschwindigkeit gegeben ist durch

$$\mathbf{v}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}. \tag{11}$$

(2 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte von allgemeinen Observablen (die Funktionen der Teilchenpositionen und Geschwindigkeiten sind). Inwiefern hängen diese vom äußeren Magnetfeld ab? Was folgt aus Ihren Resultaten für die Beschreibung des Magnetismus mithilfe der klassischen Mechanik? *(1 Punkt)*