Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik IV

WS 2016/2017 **Blatt 14** **10.02.2017**

Aufgabe 37

Wir betrachten ein relativistisches Gas aus ununterscheidbaren Teilchen mit Ruhemasse m in einem Volumen V. Hier gilt für ein einzelnes Teilchen

$$H_1(\mathbf{p}) = \sqrt{c^2|\mathbf{p}|^2 + m^2c^4}. \tag{1}$$

Dieses Gas soll mithilfe der klassischen großkanonischen Gesamtheit untersucht werden.

a) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme. Die Impulsintegration lässt sich auf das Integral

$$I(x) = \int_0^\infty e^{-x\sqrt{1+u^2}} u^2 \mathrm{d}u \tag{2}$$

zurückführen. Für die weiteren Rechnungen werden die genauen Eigenschaften von $I(x)$ nicht benötigt. Versuchen Sie daher nicht, das Integral weiter zu vereinfachen. *(2 Punkte)*

b) Zeigen Sie, dass das relativistische Gas die Zustandsgleichung

$$PV = Nk_BT \tag{3}$$

erfüllt. Dabei ist N die mittlere Teilchenzahl des Systems. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie, dass die innere Energie pro Teilchen nur von der Temperatur des Systems abhängt. *(1 Punkt)*

Aufgabe 38

Wir betrachten die in Abb.1 skizzierte Kette mit N Bindungen, die sich im Gleichgewicht mit einem Reservoir der Temperatur T befindet. Die ersten n Bindungen der Kette sind offen, die restlichen $N - n$ Bindungen sind geschlossen. Andere Konfigurationen sind - ähnlich wie bei einem Reißverschluss - nicht möglich. Zusätzlich soll die N-te Bindung immer geschlossen sein, da sonst die Kette von der rechten Seite aus aufbrechen könnte. Zum Aufbrechen einer Bindung muss dem System die Bindungsenergie $\epsilon > 0$ zugeführt werden. Bei n offenen Bindungen hat das System daher die Energie $E_n = n\epsilon$. Für jede aufgebrochene Bindung gibt es g mögliche Konfigurationen, z..B. g verschiedene Orientierungen der offenen Bindung.

a) Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme des Systems durch

$$Q_N = \frac{x^N - 1}{x - 1}, \quad x = ge^{-\beta\epsilon} \tag{4}$$

gegeben ist. *(1 Punkt)*

b) Wie viele Bindungen sind im Mittel offen? *(2 Punkte)*

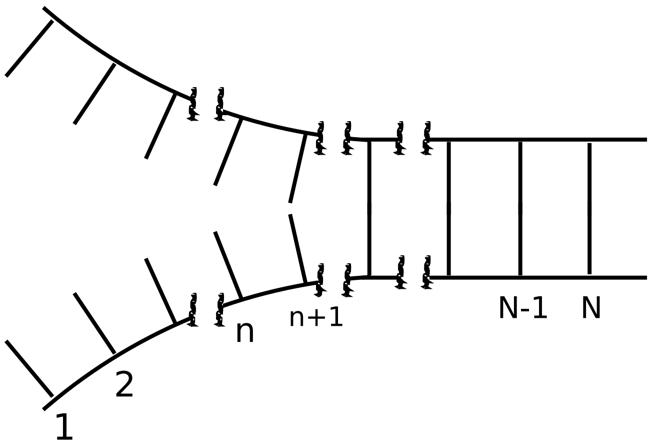

Abbildung 1: Kette, deren Bindungen aufbrechen können.

c) Die Zahl der im Mittel offenen Bindungen sei $\langle n \rangle$ Bestimmen Sie

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\langle n \rangle}{N} \tag{5}$$

und zeigen Sie, dass für $g > 1$ die Kette oberhalb einer kritischen Temperatur T_c aufbricht, während sie unterhalb dieser kritischen Temperatur geschlossen bleibt. *(1 Punkt)*

Aufgabe 39 *Relativistische Fermionen*

In dieser Aufgabe soll für ununterscheidbare relativistische Fermionen mit Ruhemasse m die thermische Zustandsgleichung, also der Druck P als Funktion der Dichte $n = N/V$ bestimmt werden.

a) Stellen Sie den Druck P mithilfe der großkanonischen Zustandssumme $\mathcal{Q}$ dar. Wenn Sie $\mathcal{Q}$ durch ein Integral nähern, erhalten Sie

$$P = g\frac{4\pi}{3h^3}\int_0^\infty p^3 \mathrm{d}p \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}p}\frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon}+1}. \tag{6}$$

Betrachten Sie nun den Fall vollständiger Entartung (d.h. $T = 0$) und zeigen Sie, dass in diesem Falle gilt

$$P = \frac{\pi g m^4 c^5}{6h^3} f\left(\frac{p_f}{mc}\right), \quad f(y) = y(2y^2-3)\sqrt{1+y^2} + 3\sinh^{-1} y. \tag{7}$$

(1 Punkt)

Hinweis: Das Integral über die Impulse p wird beim Fermi-Impuls p_f abgeschnitten. Machen Sie die Substitution $p/(mc) = \sinh x$.

b) Drücken Sie das Ergebnis aus Teil a) durch die Fermionen-Dichte $n = N/V$ aus. *(1 Punkt)*

c) Wie lautet der Druck im nichtrelativistischen Fall ($p_f \ll mc$)? *(1 Punkt)*

d) Wie lautet der Druck im ultrarelativistischen Fall ($p_f \gg mc$)? *(1 Punkt)*

Aufgabe 40

Betrachten Sie ein quantenmechanischen N-Teilchen System und einen allgemeinen Operator $\hat{A}(\hat{r}_1, \hat{r}_2)$, der eine Funktion der Ortsoperatoren zweier Teilchen ist. Der Hilbertraum ist gegeben durch das Tensorprodukt $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$ der Einteilchen Hilberträume $\mathcal{H}_i$.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $\hat{A}$ im allgemeinen Fall für eine Dichtematrix $\hat{\rho}$. Betrachten Sie danach den Spezialfall $\hat{A} = \hat{A}_1(\hat{r}_1) \otimes \hat{A}_2(\hat{r}_2)$. Bestimmen Sie die Korrelationsfunktion

$$\Delta\hat{A}(\hat{r}_1, \hat{r}_2) = \langle \hat{A}_1(\hat{r}_1) \otimes \hat{A}_2(\hat{r}_2) \rangle - \langle \hat{A}_1(\hat{r}_1) \rangle \langle \hat{A}_2(\hat{r}_2) \rangle \tag{8}$$

und diskutieren Sie Bedingungen an den Dichteoperator $\hat{\rho}$ für die $\Delta A = 0$ gilt. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie die Form der Korrelationsfunktion $\Delta A(r_1, r_2)$ für ein klassisches System an. *(1 Punkt)*