Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik IV

WS 2016/2017 **Blatt 1** **25.10.2016**

Aufgabe 1 *Spur*

Die Spur (Sp) eines Operators X is definiert als

$$\mathrm{Sp}(X) = \sum_n \langle n \,|\, X \,|\, n \rangle \,, \tag{1}$$

wobei $\{|n\rangle\}$ ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem ist. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

a) Die Spur ist basisunabhängig. *(1 Punkt)*

b) $\mathrm{Sp}(ABC) = \mathrm{Sp}(CAB) = \mathrm{Sp}(BCA)$. *(1 Punkt)*

c) Ist A diagonalisierbar mit $A\,|\lambda_i\rangle = \lambda_i\,|\lambda_i\rangle$, dann $\mathrm{Sp}(A) = \sum_i \lambda_i$. *(1 Punkt)*

Aufgabe 2 *Gemischte Zustände*

a) Ein System sei im Zustand $|\Psi\rangle$, mit $\langle \Psi \,|\, \Psi \rangle = 1$. Der Erwartungswert einer Observablen $\hat{X}$ hat den Mittelwert $\left\langle \hat{X} \right\rangle = \left\langle \Psi \,\middle|\, \hat{X} \,\middle|\, \Psi \right\rangle$. Man definiert die **Dichtematrix eines reinen Zustands** als

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle \Psi| \,. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass

(a 1) $\left\langle \hat{X} \right\rangle = \mathrm{Sp}(\hat{\rho}\hat{X})$, *(1 Punkt)*

(a 2) $\mathrm{Sp}(\hat{\rho}) = 1$, $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$, *(1 Punkt)*

(a 3) $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$. *(1 Punkt)*

b) Neben einzelnen Zuständen können in einem Ensemble auch eine statistische Verteilung von Zuständen auftreten. Liegt ein Ensemble mit unterschiedlichen Zuständen vor spricht man von einer gemischten Gesamtheit. Tritt der normierte Zustand $|\Psi_i\rangle$ mit der Wahrscheinlichkeit p_i auf, mit $\sum_i p_i = 1$, ist der Erwartungswert einer Observablen $\hat{X}$ gegeben durch $\left\langle \hat{X} \right\rangle = \sum_i p_i \left\langle \Psi_i \,\middle|\, \hat{X} \,\middle|\, \Psi_i \right\rangle$. Die **Dichtematrix definiert man im Allgemeinen** als

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \,|\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| \,. \tag{3}$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

(b 1) $\left\langle \hat{X} \right\rangle = \mathrm{Sp}(\hat{\rho}\hat{X})$, *(1 Punkt)* (b 2) $\langle \xi \,|\, \hat{\rho} \,|\, \xi \rangle \geq 0$, für alle $|\xi\rangle$ im Hilbertraum, *(1 Punkt)*

(b 3) $\mathrm{Sp}(\hat{\rho}) = 1$, $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$, *(1 Punkt)*

(b 4) $\mathrm{Sp}(\hat{\rho}^2) < 1$, falls $p_i \neq 0$ für mehr als ein i. *(1 Punkt)*

Aufgabe 3 *Spindichtematrizen*

a) Seien $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$ die Paulimatrizen, die den Spin eines Spin-1/2-Teilchens beschreiben. Zeigen Sie, dass der Dichteoperator stets die Form

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbb{1}} + \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)$$

hat. *(1 Punkt)*

b) Betrachten Sie zwei Teilchen mit Spin 1/2. Das Zweiteilchensystem befinde sich in dem reinen Zustand $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)$, wobei $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ die Eigenzustände von σ_z des Einteilchensystems sind.

(i) Wie lautet die Dichtematrix $\hat{\rho}$ des Systems? *(1 Punkt)*

(ii) $\hat{A}$ sei eine Obervable, die nur den ersten Spin betrifft und den zweiten unbeeinflusst lässt, $\hat{A} = \hat{A}_1 \otimes \hat{\mathbb{1}}_2$. Dann ist der Erwartungeswert $\left\langle \hat{A} \right\rangle = \mathrm{Sp}_1(\hat{\rho}_1 \hat{A}_1)$, wobei

$$\hat{\rho}_1 = \mathrm{Sp}_2(\hat{\rho})$$

die reduzierte Dichtematrix beschreibt.
Berechnen Sie $\hat{\rho}_1$. Beschreibt $\hat{\rho}_1$ einen reinen Zustand? *(1 Punkt)*

Aufgabe 4 *Binomialverteilung*

Wir betrachten N unabhängige Münzwürfe mit einer gezinkten Münze. Kopf tritt dabei mit der Wahrscheinlichkeit p, Zahl mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$ auf. Die Wahrscheinlichkeit n mal Kopf nach N Münzwürfen zu finden ist durch die Binomialverteilung

$$W_N(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \tag{4}$$

gegeben.

a) Ist $W_N(n)$ normiert? *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie $\langle n \rangle$, $\langle n^2 \rangle$. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie, dass das k-te Moment durch folgende Formel gegeben ist:
$\left\langle n^k \right\rangle = \left[(p\partial_p)^k (p+q)^N\right]_{q=1-p}$ *(1 Punkt)*

d) Berechnen Sie die Varianz $\mathrm{Var}(n) = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$. Wie skaliert $\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(n)}}{\langle n \rangle}$ für große N? *(1 Punkt)*