

Übung zur Vorlesung Theoretische Physik IV

WS 2016/2017

Blatt 2

02.11.2016

Aufgabe 5 *Poisson Verteilung und Stirling Formel*

Wie bereits in Aufgabe 4 betrachten wir die Binomialverteilung

$$W_N(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}. \quad (1)$$

Hierbei widmen wir uns nun dem Grenzfall kleiner Eintrittswahrscheinlichkeiten $p \ll 1$ (Bedingung A) und großer Anzahlen an Versuchen $n \ll N$ (Bedingung B). Es soll nun eine Approximation der Binomialverteilungen in diesem Grenzfall gefunden werden. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Leiten Sie die Stirling Formel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \text{für } n \gg 1 \quad (2)$$

als Näherung der Fakultät für große Zahlen n her. Verwenden Sie hierbei die Gamma Funktion als kontinuierliche Fortsetzung der Fakultät

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty dx e^{n \ln(x)-x} \quad (3)$$

und substituieren Sie $y := x/n$. Approximieren Sie das verbleibende Integral mithilfe der Sattelpunktsnäherung

$$\int_a^b dx e^{nf(x)} \approx \sqrt{\frac{2\pi}{n|f''(x_0)|}} e^{-nf(x_0)}, \quad \text{für } n \gg 1, \quad (4)$$

für f zweimal stetig differenzierbar, beliebige Endpunkte $a < b$, und x_0 das globale Maximum von f . (1 Punkt)

b) Zeigen Sie dass $(1-p)^{N-n} \approx e^{-Np}$. (1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass $N!/(N-n)! \approx N^n$. (1 Punkt)

d) Leiten Sie mithilfe der vorherigen Aufgabenteile die Poissonverteilung

$$W_N(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \quad (5)$$

als Grenzfall der Binomialverteilung unter den Bedingungen A und B, also für eine große Anzahl an Versuchen und kleine Eintrittswahrscheinlichkeiten p , her, wobei $\lambda := Np$. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Verteilung. (1 Punkt)

- e) *Im Casino* Beim Roulette wird in jedem Spiel eine Kugel geworfen, die zufällig auf ein Feld mit Nummer 0 bis 36 fällt, wobei jede Nummer nur einmal vorkommt. Als Coup bezeichnet man eine Serie von 37 Spielen. Berechnen Sie die mittlere Anzahl an unterschiedlichen Nummern, die während eines Coups getroffen werden. Tun Sie dies einmal mithilfe der Binomialverteilung und einmal mittels der Poissonverteilung und vergleichen Sie die erhaltenen Ergebnisse. (1 Punkt)

Aufgabe 6 Zentraler Grenzwertsatz

Gegeben sei an Satz von N statistisch unabhängigen Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_N mit $\langle X_i \rangle = 0$ und $\langle X_i^2 \rangle = 1$ mit identischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Die erzeugende Funktion der Momente einer Zufallsvariablen X ist definiert durch

$$\chi(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle X^n \rangle \quad (6)$$

- a) Aus den Ableitungen der erzeugenden Funktion können alle Momente einer Zufallsvariablen generiert werden. Beweisen Sie dies indem Sie folgendes Lemma zeigen

$$\frac{\partial^n}{(i\partial k)^n} \chi(k)|_{k=0} = \langle X^n \rangle. \quad (7)$$

(1 Punkt)

- b) Sei nun $Y_n = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n X_i$. Wir wollen nun zeigen, dass die charakteristische Funktion $\chi_n(k)$ von Y_n für große Anzahlen n unabhängiger Variablen punktweise gegen die Normalverteilung $\chi(k) = e^{-k^2/2}$ konvergiert. Beweise Sie dies wie folgt:

- (B1) Begründen Sie, warum alle Zufallsvariablen X_i die gleiche charakteristische Funktion $\tilde{\chi}(k)$ besitzen. Zeigen Sie, dass diese charakteristische Funktion bis zur zweiten Ordnung in k gegeben ist durch

$$\tilde{\chi}(k) = 1 - \frac{k^2}{2} + \mathcal{O}(k^3) \quad (8)$$

(1 Punkt)

- (B2) Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion $\chi_n(k)$ durch folgende Formel mit den charakteristischen Funktionen der einzelnen Zufallsvariablen X_i verknüpft ist

$$\chi_n(k) = \left[\tilde{\chi}(n^{-1/2}k) \right]^n. \quad (9)$$

(1 Punkt)

- (B3) Bilden Sie den Grenzwert $n \rightarrow \infty$ und zeigen Sie, dass $\chi_n(k)$ für einen festen Wert von k punktweise gegen die Normalverteilung

$$\chi(k) = e^{-k^2/2} \quad (10)$$

konvergiert.

(1 Punkt)

Aufgabe 7 Dichteoperator für Spin-1/2 Teilchen

Seien \hat{S}_x , \hat{S}_y und \hat{S}_z die Komponenten des Drehimpulsoperators eines Spin-1/2 Teilchens. Der Drehimpulsoperator $\hat{\mathbf{S}}$ kann dann in der Form $\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\hbar\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ geschrieben werden. Hierbei ist wie in Aufgabe 3 $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$, mit den Pauli Matrizen

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Die Basis der Pauli Matrizen ist derart gewählt, dass der Zustand $|+\rangle = (1, 0)^T$ Eigenzustand von \hat{S}_z mit Eigenwert $\frac{\hbar}{2}$ und der Zustand $|-\rangle = (0, 1)^T$ Eigenzustand von \hat{S}_z mit Eigenwert $-\frac{\hbar}{2}$ ist.

- a) Der Polarisationsvektor $\mathbf{p} = \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}} \rangle$ beschreibt die Richtung in die der Erwartungswerts des Drehimpulsoperators zeigt, wenn sich der Spin in einem reinen Zustand der Form $|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$ befindet ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$). Zeigen Sie
- (A1) Wie groß ist die Anzahl an reellen Parametern, mit denen sich \mathbf{p} beschreiben lässt. Begründen Sie ihre Antwort, in dem sie die Form von \mathbf{p} als Funktion dieser reellen Parameter angeben. Welche Teilmenge von \mathbb{R}^3 wird durch alle möglichen Werte von \mathbf{p} beschrieben? (1 Punkt)
- (A2) Aus dem Zustandsvektor $|\psi\rangle$ folgt der Wert des Polarisationsvektors \mathbf{p} . Können Sie umgekehrt aus dem Wert des Polarisationsvektors \mathbf{p} den Zustandsvektor $|\psi\rangle$ rekonstruieren? Begründen Sie ihre Antwort! (1 Punkt)
- (A3) Welche Zustandsvektoren $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ beschreiben antiparallele Polarisationsvektoren $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$. (1 Punkt)
- (A4) Schreiben Sie die Dichtematrix

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (12)$$

zunächst als Funktion von α und β und im zweiten Schritt als Funktion des Polarisationsvektors \mathbf{p} . (1 Punkt)

- b) Beantworten Sie die Fragen (A1)-(A4) für allgemeine Zustandsgemische. Verwenden Sie die Darstellung einer Dichtematrix $\hat{\rho}$ als Funktion des Polarisationsvektors \mathbf{p} um zu zeigen, dass die Darstellung $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ als gewichtete Summe von Projektionen, nicht eindeutig ist. Hierbei ist die Analogie zu dem Schwerpunkt eines klassischen Systems von Massen auf einer Kugeloberfläche hilfreich. (2 Punkte)
- c) Die Entropie S einer Dichtematrix $\hat{\rho}$ ist wie folgt definiert

$$S = -\text{Sp}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}). \quad (13)$$

Schreiben Sie die Entropie als Funktion des Polarisationsvektors \mathbf{p} . Wie hängt sie vom Betrag $p = |\mathbf{p}|$ ab? (1 Punkt)