Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik IV

WS 2016/2017 **Blatt 4** **17.11.2016**

Aufgabe 10

Wir betrachten ein System aus N nicht miteinander wechselwirkenden Spin-1/2 Teilchen, die sich in einem statischen magnetischen Feld $\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{e}_z$ befinden. Der Hamilton Operator ist dann gegeben durch

$$\hat{H} = -\hat{M}_z B_0 = \mu_B B_0 \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i^z \tag{1}$$

wobei $\hat{M}_z$ der Operator der Magnetisierung in z-Richtung ist und μ_B das Bohr-Magneton. Des Weiteren sei $\hat{\rho}_N$ die Dichtematrix des gesamten Systems der N Spins.

a) Zeigen Sie, dass im Gleichgewicht und in einem homogenen System folgende Aussage gilt:

$$U = \langle \hat{H} \rangle = N \, \mathrm{Tr}\{\hat{H}_1 \hat{\rho}_1\} \tag{2}$$

mit $\hat{H}_1 = \mu_B B_0 \hat{\sigma}_1^z$ und $\hat{\rho}_1 = \mathrm{Tr}_{N-1}\{\hat{\rho}_N\}$ mit Tr_{N-1} die Spur auf die $N-1$ Spins. *(1 Punkt)*

b) Gehen Sie von einer Boltzmann-Gibbs Verteilung der Spins aus. Die Dichtematrix eines einzelnen Spins ist dann gegeben durch

$$\hat{\rho}_1 = \frac{e^{\beta\epsilon_0}|-\rangle\langle-| + e^{-\beta\epsilon_0}|+\rangle\langle+|}{\mathcal{Z}_1} \tag{3}$$

mit der Normierungskonstanten $\mathcal{Z}_1 = e^{\beta\epsilon_0} + e^{-\beta\epsilon_0}$ und $\epsilon_0 = \mu_B B_0$. Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie U gegeben ist durch

$$U = -N\mu_B B_0 \frac{e^{2\beta\mu_B B} - 1}{e^{2\beta\mu_B B} + 1}, \tag{4}$$

mit $\beta = 1/(k_B T)$, indem Sie explizit den Erwartungswert des Hamilton Operators $\langle \hat{H} \rangle$ bestimmen. Bilden Sie den Grenzwert $T \to 0$ und $T \gg \frac{\mu_B B_0}{k_B}$. Zeigen Sie weiterhin, dass der Erwartungswert der Magnetisierung in z-Richtung gegeben ist durch

$$\langle \hat{M}_z \rangle = N\mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B B}{k_B T}\right). \tag{5}$$

(1 Punkt)

c) Benutzen Sie die explizite Form der Wahrscheinlichkeiten $p_\pm = \frac{e^{\mp\beta\epsilon_0}}{\mathcal{Z}_1}$ um folgende Formel für die Entropie S des Systems herzuleiten

$$S = -Nk_B[p_+ \ln p_+ + p_- \ln p_-]. \tag{6}$$

(1 Punkt)

d) Verwenden Sie die Formeln der Entropie S oder der Gesamtenergie U um eine Formel für die spezifische Wärme C herzuleiten. Hierbei gilt

$$C = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_{B_0} = T \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{B_0} = k_B N (\beta\mu_B B_0)^2 \mathrm{sech}^2(\beta\mu_B B_0). \tag{7}$$

Wie verhält sich die spezifische Wärme C für Temperaturen in den Grenzfällen $T \ll \frac{\mu_B B_0}{k_B}$ und $T \gg \frac{\mu_B B_0}{k_B}$. Zeigen Sie, dass das Maximum der spezifischen Wärme $C(T)$ durch die Curie Temperatur $\theta = \frac{\mu_B B_0}{k_B}$ angenähert werden kann.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die Gleichung $x \tanh x = 1$ für $x > 0$ nur eine Lösung bei $x \approx 1.2$ besitzt.

(1 Punkt)

Aufgabe 11 *Entropie-Elasitizität*

Als einfaches Modell für die Entropie-Elasitzität betrachte man eine eindimensionale Kette, die aus N Elementen besteht. Jedes Element der Kette habe die Länge a und soll sich entweder parallel oder antiparallel zur Verbindung der beiden Endpunkte ausrichten können. n Elemente der Kette seien antiparallel zur Verbindung der beiden Endpunkte ausgerichtet, die restlichen $N - n$ Elemente seien parallel dazu ausgerichtet. Dabei soll $N \gg 1$, $n \gg 1$ und $N - n \gg 1$ gelten.

a) Berechnen Sie die Anzahl an Mikrozuständen, die zu dem oben beschriebenen Zustand gehören. Geben Sie einen Zusammenhang zwischen N, n und der Länge x der Kette an. *(1 Punkt)*

b) Wie hängt die Entropie des Systems von der Länge der Kette ab? Zeigen Sie, dass die Entropie mit der Länge der Kette abnimmt, d.h. $\frac{\partial S}{\partial x} < 0$. Was bedeutet das für die Kette, wenn man annimmt, dass das System versucht, eine Konfiguration anzunehmen, bei der die Entropie maximal ist. *(2 Punkte)*