Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik IV

WS 2016/2017 **Blatt 5** **25.11.2016**

Aufgabe 12

Wir betrachten ein mikrokanonisches Ensemble mit N identischen Teilchen, einem Volumen V und einer Energie die Werte zwischen $E-\Delta$ und E annimmt ($\Delta > 0$). Zeigen Sie, dass die folgenden drei Formeln zu einer äquivalenten Definition der Entropie S führen, die sich lediglich durch eine additive Konstante der Ordnung $\mathcal{O}(\ln N)$ unterscheidet.

$$S = k \ln \Gamma(E), \tag{1a}$$
$$S = k \ln \omega(E), \tag{1b}$$
$$S = k \ln \Sigma(E). \tag{1c}$$

Hierbei ist $\Gamma(E)$ das Phasenraumvolumen, dass durch die Gesamtheit aller Mikrozustände eingenommen wird mit

$$\Gamma(E) = \int_{E-\Delta}^{E} \mathrm{d}E' \mathrm{Tr}\left\{\delta(E' - \hat{H})\right\}, \tag{2}$$

$\Sigma(E)$ ist das Phasenraumvolumen, dass von der Fläche mit Energie E begrenzt wird mit

$$\Sigma(E) = \mathrm{Tr}\left\{\theta(E - \hat{H})\right\}, \tag{3}$$

und $\omega(E)$ ist die Zustandsdichte des System bei der Energie E und ist definiert als

$$\omega(E) = \frac{\partial \Sigma(E)}{\partial E}. \tag{4}$$

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass $\Delta \ll E$ und dass der durch den Integranden in Gl.(2) beschriebene Hyperkörper derart beschaffen ist, dass $\Sigma(E-\Delta)/\Sigma(E) \to 0$, für festes Δ und $N \to \infty$. *(2 Punkte)*

Aufgabe 13

Betrachten Sie ein klassisches ideales Gas von Teilchen der Masse m. Die Hamiltonsche Funktion ist dann gegeben durch

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{N} p_i^2, \tag{5}$$

mit dem Impuls p_i des i-ten Teilchens.

a) Bestimmen Sie das Phasenraumvolumen $\Sigma(E)$ mit

$$\Sigma(E) = \frac{1}{h^{3N} N!} \int_{H(p,q)<E} \mathrm{d}^{3N}p\, \mathrm{d}^{3N}q, \tag{6}$$

und bestimmen Sie hieraus folgende Formel für die Entropie S des idealen Gases

$$S = Nk_B \ln\left(\frac{V}{N}\left(\frac{E}{N}\right)^{3/2}\right) + \frac{3}{2}Nk_B\left(\ln\left(\frac{4\pi m}{3h^2}\right) + \frac{5}{3}\right). \tag{7}$$

(4 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass aus der Formel für die Entropie in Gl. (6) die kalorische Zustandsgleichung $E = \frac{3}{2}Nk_BT$ sowie die thermische Zustandsgleichung $pV = k_BNT$ folgen. *(2 Punkte)*

Hinweis: Die Fläche der $3N$ dimensionalen Einheitskugel beträgt $2\frac{\pi^{3N/2}}{\Gamma(3N/2)}$.

Aufgabe 14

Betrachten Sie erneut ein System aus N unterscheidbaren Spin-1/2 Teilchen in einem Magnetfeld. Die einzelnen Spins können nur zwei Energiewerte $E_- = -E_0/2$ oder $E_+ = E_0/2$ annehmen. Sei n_- die Besetzung von E_- und n_+ die Besetzung von E_+. Die Gesamtenergie des Systems sei U.

a) Bestimmen Sie die Entropie des Systems im mikrokanonischen Ensemble. *(1 Punkt)*

b) Finden Sie die wahrscheinlichsten Werte für n_- und n_+ und bestimmen Sie die Standardabweichung von diesen Werten. *(1 Punkt)*

c) Bestimmen Sie die Temperatur und zeigen Sie, dass sie negative Werte annehmen kann. *(1 Punkt)*

d) Nehmen Sie an, ein Reservoir mit negativer Temperatur wird in Kontakt mit einem Reservoir positiver Temperatur gebracht. In welche Richtung fließt die Wärme? *(1 Punkt)*

Aufgabe 15

Zeigen Sie, dass die formale Lösung der von Neumann Gleichung

$$\partial_t\hat{\rho}_t = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}_t] \tag{8}$$

durch folgende Gleichung gegeben ist

$$\hat{\rho}_t = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\hat{\rho}_0 e^{i\hat{H}t/\hbar} \tag{9}$$

wobei $\hat{\rho}_0$ die Dichtematrix zum Zeitpunkt $t = 0$ ist. *(1 Punkt)*