Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik IV

WS 2016/2017 **Blatt 8** **16.12.2016**

Aufgabe 21 *Teilchenzahl-Fluktuationen im Großkanonischen Ensemble*

Im großkanonischen Ensemble werden die Erwartungswerte einer Größe $A(\{n_{\mathbf{p}}\})$, die von den Besetzungszahlen $n_{\mathbf{p}}$ abhängt, gemäß der Relation

$$\langle A(\{n_{\mathbf{p}}\})\rangle = \frac{1}{\mathcal{Q}(V,\beta,z)} \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{\substack{\{n_{\mathbf{p}}\} \\ \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} = N}} A(\{n_{\mathbf{p}}\}) e^{-\beta \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}}} \tag{1}$$

berechnet. Die großkanonische Zustandssumme ist hierbei gegeben durch

$$\mathcal{Q}(V,\beta,z) = \prod_{\mathbf{p}} [1 \mp z e^{-\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}]^{\mp 1} \tag{2}$$

mit einem Minus im Falle von Bose-Einstein-Statistik und einem Plus für Fermi-Dirac-Statistik. Hierbei durchlaufen die Besetzungszahlen $n_{\mathbf{p}}$ die Werte $n_{\mathbf{p}} \in \{0,1,2,3,\dots\}$ für Bosonen und $n_{\mathbf{p}} \in \{0,1\}$ für Fermionen.

a) Zeigen Sie zunächst mithilfe von Gl. (1) die Gültigkeit der Relation

$$\langle n_{\mathbf{p}}\rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln \mathcal{Q}}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}} \tag{3}$$

und bestimmen Sie hieraus die mittlere Besetzungszahlen

$$\langle n_{\mathbf{p}}\rangle = \frac{z e^{-\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}}{1 \mp z e^{-\beta\epsilon_{\mathbf{p}}}} \tag{4}$$

mit einem Minus für Bose-Einstein- und einem Plus für Fermi-Dirac-Statistik.

(2 Punkte)

b) Leiten Sie nun den Zusammenhang

$$-\frac{1}{\beta}\frac{\partial \langle n_{\mathbf{p}}\rangle}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}} = \langle n_{\mathbf{p}}^2\rangle - \langle n_{\mathbf{p}}\rangle^2 \tag{5}$$

her und zeigen Sie damit, dass für die relativen Teilchenzahl-Fluktuationen Folgendes gilt

$$\frac{\langle n_{\mathbf{p}}^2\rangle - \langle n_{\mathbf{p}}\rangle^2}{\langle n_{\mathbf{p}}\rangle^2} = \frac{1}{\langle n_{\mathbf{p}}\rangle} \pm 1, \tag{6}$$

mit einem Plus für Bose-Einstein- und einem Minus für Fermi-Dirac-Statistik.

(2 Punkte)

Aufgabe 22 *Quantengase*

Wir wollen nun die Zustandssumme eines Quantenteilchens in einem Quader mit Volumen V bestimmen.

a) Berechnen Sie zunächst die Zustandssumme $\mathcal{Q}$ mit

$$\ln \mathcal{Q} = \mp \sum_{\mathbf{p}} \ln(1 \mp z e^{-\beta \epsilon_{\mathbf{p}}}) \tag{7}$$

für den Fall, dass bei der Quantisierung periodische Randbedingungen angenommen werden. Führen Sie den Grenzwert $V \to \infty$ aus und ersetzten Sie die Summe durch ein Integral. *(1 Punkt)*

b) Wir wollen nun berechnen, ob die Wahl der Randbedingungen für das Ergebnis wichtig ist. Nehmen Sie dazu nun an, dass die Wellenfunktion des Teilchens am Rand des Volumens verschwindet. Zeigen Sie, dass Sie - mit Ausnahme des Grundzustands bei Bosonen - die gleiche Zustandssumme erhalten wie bei der Quantisierung mit periodischen Randbedingungen. *(1 Punkt)*