Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik IV

WS 2016/2017 **Blatt 9** **05.01.2016**

Aufgabe 23 *Fermi-Gas Kolben*

In dieser Aufgabe betrachten wir einen Zylinder, dessen Volumen durch einen frei verschiebbaren Kolben in zwei Unterräume 1 und 2 aufgeteilt ist. In beiden Teilvolumina befinden sich Fermi-Gase. Die Teilchen im Volumen 1 haben hierbei einen Spin von 1/2 und die Teilchen in Volumen 2 einen Spin von 3/2. Beide Gase besitzten die gleiche Temperatur T. Bestimmen Sie das Verhältnis der Dichten der beiden Gase, bei der sich das System im Gleichgewicht befindet, in den Grenzfällen $T \to 0$ und $T \to \infty$.

(3 Punkte)

Aufgabe 24 *Relativistisches Fermi-Gas, Weiße Zwerge und Chandrasekhar Masse*

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit dem Druck- und dem Dichteverlauf im Inneren eines kugelförmigen, nichtrotierenden Weißen Zwerges und berechnen die Grenzmasse, die sogenannte Chandrasekhar-Masse, ab welcher ein weißer Zwerg instabil wird und unter seiner eigenen Gravitationskraft kollabiert. Hierzu nehmen wir an, dass der Weiße Zwerg völlig aus ionisiertem ^{4}He besteht. Das Elektronengas kann dabei als völlig entartet angesehen werden, da dessen Temperatur $T \approx 10^6\,\mathrm{K}$ viel kleiner ist als die typische Fermi-Temperatur $T_F = 10^9\,\mathrm{K}$. Das relativistische Elektronengas wirkt dem durch die Heliumkerne erzeugten Gravitationsdruck entgegen, so dass sich ein hydrostatisches Gleichgewicht einstellt.

Um den lokalen Gleichgewichtszustand eines kleinen Teils des Elektronengases innerhalb des Weißen Zwerges zu beschreiben, betrachten wir die großkanonische Zustandssumme für ein relativistisches Fermi-Gas , das sich in einem Kasten mit der Kantenlänge L und dem Volumen V befindet (periodische Randbedingungen). Das Volumen ist hierbei so klein gewählt, dass sowohl die lokale Elektronendichte als auch die Dichte der Heliumkerne als konstant angesehen werden kann. Der Elektronenspin ist gegeben durch $s = 1/2$, der zugehörige Entartungsfaktor lautet $g = 2s + 1 = 2$ und $n_e = \langle N_e \rangle / V$ sei die lokale Dichte des Elektronengases. Dann lautet der Logarithmus der großkanonischen Zustandssumme des Fermi-Gases

$$\ln \mathcal{Q}(V, \beta, z) = g \sum_{\vec{p}} \ln(1 + z e^{-\beta \epsilon_{\vec{p}}}), \quad \text{mit} \quad \epsilon_{\vec{p}} = m_e c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\vec{p}}{m_e c}\right)^2} \tag{1}$$

als relativistische Einteilchenenergie eines Elektrons mit Impuls $\vec{p}$ und Masse $m_e = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

a) Nähern Sie die Zustandssumme analog zu Aufgabe 22 für große $L \gg 1$ durch ein Integral über alle Impulse an und zeigen Sie ausgehen von $\Omega = -k_B T \ln \mathcal{Q}(V, \beta, z) = -PV$, dass sich der Druck des Elektronengases P über das Integral

$$P = \frac{4\pi g}{3h^3} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}p} \frac{p^3 \mathrm{d}p}{z^{-1} e^{\beta \epsilon(p)} + 1} \tag{2}$$

ergibt, wobei $\epsilon(p) = \epsilon_{\vec{p}}$ mit $p = |\vec{p}|$. Berechnen Sie das Integral für den Grenzfall $T \to 0$ indem Sie die Relation

$$\lim_{T\to 0}(z^{-1}e^{\beta\epsilon(p)} + 1)^{-1} = \Theta(\epsilon(p_F) - \epsilon(p)) \tag{3}$$

verwenden. Der Fermi-Impuls p_F entspricht hierbei dem Radius der Impulskugel und ist über die Relation

$$g\frac{4\pi V}{h^3}\int_0^{p_F} \mathrm{d}p\, p^2 = \frac{gV}{h^3}\frac{4\pi p_F^3}{3} = \langle N_e\rangle \tag{4}$$

definiert. Zeigen Sie mit Hilfe der Substitution $\frac{p}{m_e c} = \sinh x$, dass sich folgender Ausdruck für den Elektronendruck ergibt

$$P = \frac{\pi g m_e^4 c^5}{6h^3} f\left(\frac{p_F}{m_e c}\right), \quad \text{wobei} \quad f(y) = y(2y^2 - 3)\sqrt{1+y^2} + 3\sinh^{-1}(y). \tag{5}$$

(3 Punkte)

b) Bestimmen Sie die führende Ordnung des Ausdrucks (5) für den nichtrelativitschen Grenzfall $\frac{p}{m_e c} \ll 1$, indem Sie die Reihenentwicklung $\sinh^{-1}(y) = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \mathcal{O}(y^7)$ verwenden. Zeigen Sie damit, dass sich nach Ersetzen des Fermi-Impulses der Außdruck

$$\frac{p}{m_e c} \ll 1: \quad P = C_{nr} n_e^{\gamma_{nr}} \quad \text{mit} \quad C_{nr} = \frac{g\hbar^2}{30\pi^2 m_e}\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{5/3} = \text{const.} \quad \text{und} \quad \gamma_{nr} = \frac{5}{3} \tag{6}$$

für den Druck ergibt, wobei γ_{nr} den Adiabatenexponenten im nichtrelativistischen Grenzfall bezeichnet.

(1 Punkt)

c) Berechnen Sie die führende Ordnung des Ausdrucks (5) für den ultrarelativistischen Fall $\frac{p}{m_e} \gg 1$. Verwenden Sie dazu die asymptotische Entwicklung $\sinh^{-1}(y) = \ln(2y) + \mathcal{O}(y^{-2})$ für $y \gg 1$ und leiten Sie den folgenden Ausdruck ab:

$$\frac{p}{m_e c} \gg 1: \quad P = C_{ur} n_e^{\gamma_{ur}} \quad \text{mit} \quad C_{ur} = \frac{gc\hbar}{24\pi^2}\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{4/3} \quad \text{mit} \quad \gamma_{ur} = \frac{4}{3}. \tag{7}$$

(1 Punkt)

d) Wir kommen nun zur Berechnung des kugelsymmetrischen Druck- und Massendichteverlaufs $P(r)$ und $\rho(r)$ im Inneren eines Weißen Zwerges ($0 < r \leq R$), dessen Radius und Masse wir mit R und M bezeichnen. Zuerst bemerken wir, dass die Elektronendichte $n_e(r) = \langle Ne\rangle/V$ vom Abstand r zwischen Volumen V und Zentrum des Weißen Zwergs abhängt. Da aufgrund der vollständigen Ionisation auf die vier Nukleonen des Helium-Kerns zwei Elektronen kommen, ergibt sich entsprechend für die Massendichte $\rho(r) = 2m_u n_e(r)$, mit $m_u = 1.66 \times 10^{-27}\,\text{kg}$. Da die Masse von Proton und Neutron um einen Faktor von 2000 größer ist als die des Elektrons, kann der Beitrag der Elektronen zur Massendichte in guter Näherung vernachlässigt werden. Wir beschränken uns im Folgenden auf die in den Aufgabenteilen b) und c) untersuchten Fälle des nichtrelativistischen und des ultrarelativistischen Elektronengases. Mit den Ausdrücken für die

Elektronendichte aus b) und c) finden wir den folgenden Zustammenhang zwischen Druck und Massendichte

$$P(r) = K\ (\rho(r))^{\gamma} = K\ (\rho(r))^{\frac{1+n}{n}} \tag{8}$$

mit der vom Fall abhängigen Konstanten $K \in \{C_{nr}/(2m_u)^{\gamma_{nr}},\, C_{ur}/(2m_u)^{\gamma_{ur}}\}$, dem adiabatischen Exponenten $\gamma \in \{\gamma_{nr}, \gamma_{ur}\}$ und dem zugehörigen Polytropen-Index $n = \frac{1}{\gamma-1}$.

Leiten Sie aus der Gleichung für das hydrostatische Gleichgewicht

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r) \tag{9}$$

und der Gleichung für die Massen-Erhaltung

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \mathrm{d}r' \rho(r') r'^2 \tag{10}$$

folgende Relation her

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r^2}{\rho(r)}\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r}\right) = -4\pi G\rho(r). \tag{11}$$

Hierbei ist $M(r)$ die Masse innerhalb der Kugel mit Radius r und $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}$ die Newtonsche Gravitationskonstante.

(1 Punkt)

e) Ersetzen Sie in Gl. (11) die Massendichte $\rho(r)$ durch die dimensionslose Funktion $\theta(r)$, die über $\rho(r) = \rho_c\,\theta^n(r)$ definiert ist. Dabei bezeichnen wir mit $\rho_c = \rho(0)$ die Massendichte im Zentrum des Weißen Zwerges. Führen Sie des Weiteren die neue Koordinate $\xi = r/a$ über die Skalierungskonstante $a^2 = \frac{(n+1)K}{4\pi G}\rho_c^{(1-n)/n}$ ein und zeigen Sie damit, dass sich die Differentialgleichung (11) in die folgende Form bringen lässt

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right) = -\theta^n. \tag{12}$$

Wie lauten die Anfangsbedingungen für $\xi = 0$, die die Lösung $\theta(\xi)$ dieser Differentialgleichung eindeutig festlegen?

(2 Punkte)

f) Begründen Sie, warum die erste Nullstelle ξ_1 der dimensionslosen Massendichte $\theta(\xi)$ den Radius R des Weißen Zwergs bestimmt. Beweisen Sie, dass seine Masse $M = M(R)$ entsprechend durch die Gleichung

$$M = 4\pi\rho_c R^3 \left(-\frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right)\Bigg|_{\xi=\xi_1} \tag{13}$$

gegeben ist. *(1 Punkt)*

Hinweis: Die numerische Integration der Differentialgleichung (12) liefert folgende Werte:

1. Nichtrelativistischer Grenzfall: erste Nullstelle $\xi_1^{nr} = 3.65$ und $\left(-\frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right)\Big|_{\xi=\xi_1}^{nr} = 0.055642.$

2. Ultrarelativistischer Grenzfall: erste Nullstelle $\xi_1^{nr} = 6.90$ und $\left(-\frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right)\Big|_{\xi=\xi_1}^{ur} = 0.006152.$

g) Bestimmen Sie ρ_c als Funktion von R und beweisen Sie damit den Zustammenhang

$$M(R) = 4\pi \left(\frac{4\pi G}{\xi_1^2 K(n+1)}\right)^{\frac{n}{1-n}} \left(-\frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right)\Big|_{\xi=\xi_1} R^{\frac{3-n}{1-n}} \tag{14}$$

zwischen Masse und Radius des weißen Zwerges.

(1 Punkt)

h) Zeigen Sie, dass im nichtrelativistischen Grenzfall die Masse-Radius-Relation (14)

$$\left(\frac{M}{M_\odot}\right) \times R^3 \approx (8887\,\mathrm{km})^3 \tag{15}$$

lautet, wobei $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$ die Masse unserer Sonne ist. Was passiert demnach mit dem Radius R, wenn wir die Masse M des weißen Zwergs erhöhen?

(1 Punkt)

i) Zeigen Sie, dass die Masse M des Weißen Zwerges im ultrarelativistischen Fall nicht von dessen Radius R abhängt und bestimmen Sie für diesen Fall aus (14) die Chandrasekhar-Grenzmasse

$$M_{ch} \approx 1.46 \times M_\odot. \tag{16}$$

Was für ein Schicksal erwartet einen Stern, nachdem er seinen Wasserstoffvorrat aufgebraucht hat, wenn seine Masse größer ist als die Chandrasekhar-Masse?

(1 Punkt)