Skript zum Vorkurs Mathematik für Studierende der Physik und verwandter Fächer, WS 18/19

Frank Wilhelm-Mauch
und
Giovanna Morigi

21. September 2018

Fachrichtung Physik, Universität des Saarlandes

Vorwort

Der Studieneinstieg ist ein neuer Abschnitt in Ihrem Leben und auch in der Intensität und Art des Lernens. In den MINT-Fächern wird die Sprache der Mathematik gesprochen und darum ist ein sicheres Beherrschen der Schulmathematik zwingende Voraussetzung. Der Vorkurs dient dazu, diesen Stoff zu wiederholen und vertieft einzuüben, so dass sie zum Studienstart ihn sicher beherrschen.

Der Besuch des Vorkurses kann viele Motivationen haben:

- leider bleibt in der Schule immer weniger Zeit, den behandelten Stoff so zu vertiefen, dass er problemlos sitzt. Wir sehen oft, dass zwar alle Mathematikthemen behandelt werden, aber leider nur noch so eingeübt wie man z.B. historische Daten wiedergeben kann, während Sie im Studium die Schulmathematik so beherrschen sollten wie das Fahrradfahren. Die Übungen zum Vorkurs helfen Ihnen, dieses Niveau abzusichern

- trotz Aussetzung der Wehrpflicht haben doch vielleicht einige von Ihnen eine Pause gemacht, für BFD, für eine Berufsausbildung oder ähnliches. Der Vorkurs kann Sie wieder an die Schulmathematik erinnern.

- Sie lernen schon vor Beginn des Studiums die Abläufe und die Lerntechniken für die Universität kennen - wie ist das, wenn Mathematik relativ zügig und anspruchsvoll behandelt wird. Sie lernen auch die Bedeutung des Übens kennen, ohne, dass es dafür Noten gibt

Der Vorkurs orientiert sich am Inhalt der E-Kurse im Saarland. Er konzentriert sich auf den verpflichtenden Teil, deckt aber auch den fakultativen Teil ab. Er betont das sichere und zielgerichtete Rechnen.

Ein Skript ersetzt nicht die Vorlesung sondern dient zur Erleichterung der Mitschrift. Viele Lerner (einschließlich des Autors dieser Zeilen) können sich am besten konzentrieren, wenn sie mitschreiben - da ist das Skript aber dennoch eine gute Vor- und Nachbereitung. Die erste Auflage des Skripts wird auch einige Fehler enthalten - und kaum Zeichnungen, die zum Verständnis oft essenziell sind.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mathematik

Wir wiederholen einige Grundbegriffe der Logik und Zahlenräume und führen Notationen ein. In Ihren „echten“ Mathematikvorlesungen wird das sehr viel mehr Zeit einnehmen, als in praktisch orientierten Veranstaltungen wie dieser.

1.1 Aussagenlogik

Wir beschäftigen uns mit logischen Aussagen, die nur „falsch“ oder „wahr“ (oft geschrieben als 0 und 1) als Ergebnis haben können. Wie können wir diese verknüpfen? Sei a eine solche Aussage. Die einzige nicht banale Operation, die wir damit ausführen können ist die Negation $\neg a$ mit der Wahrheitstafel

a	$\neg a$
0	1
1	0

Klarerweise heben sich zwei Negationen auf, $\neg\neg a = a$. Interessanter wird die Verknüpfung von zwei Aussagen a und b . Wir sagen a und b sind genau dann wahr, wenn beide wahr sind und schreiben

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Wir sagen a oder b sind genau dann wahr, wenn mindestens eins von ihnen wahr ist. Die Wahrheitstafel ist

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Im Alltag benutzt man oft auch entweder-oder. In der Mathematik heißt dies Exklusiv-oder (XOR). Man schreibt dies als $a \oplus b$ in Reminiszenz an die binäre Addition und hat die Wahrheitstafel

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Wir sehen, dass die Wahrheitstafel von $\wedge$der Multiplikation und $\vee$der Addition ähnelt. Man kann zeigen, dass das Distributivgesetz analog gilt

$$a \wedge (b \vee c) = (a\wedge\mathrm{b}) \vee (a \wedge c)\,.$$

Das Verneinen einer logischen Operation tauscht die Operation und negiert die Einträge $\neg\,(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$ bzw. $\neg\,(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$.

1.2 Logisches Schließen

Jetzt wollen wir das Schließen und Schlussfolgern als logische Operation behandeln. Was bedeutet „aus a folgt b“ ? Klarerweise muss, wenn a wahr ist auch b wahr sein. Was passiert, wenn a nicht wahr ist? Dann können wir keine Aussage treffen! Wenn a ist „es regnet“ und b „die Straße wird nass“, dann schließt das nicht aus, dass ich nass werde obwohl es gar nicht regnet (ich könnte auch schwimmen gehen oder in einen Bach fallen). Dem entgegengesetzt ist die *Äquivalenz* von Aussagen - a und b sind entweder beide richtig oder beide falsch.

Aussagenlogisch können wir schreiben

a	b	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

und daraus ergibt sich dass $(a \Rightarrow b) = (\neg a \vee b)$ ist. Ferner können wir leicht überprüfen, dass $a \Leftrightarrow b = (a \Rightarrow b) \wedge (a \Leftarrow b)$ d.h. zwei Aussagen sind äquivalent wenn aus a b und aus b a folgt.

Wie Sie sehen können wir Logik in mathematische Hieroglyphen schreiben. Nützliche Symbole sind noch der Existenzquantor $\exists$ der bedeutet „es existiert" und der Allquantor $\forall$ „für alle". Wenn wir etwas über die Existenz aussagen, z.B. „es existiert eine natürliche Zahl, die eine Primzahl ist" dann sagen wir nichts darüber aus, für wieviele Exemplare diese Aussage gilt außer, dass es mindestens eines ist. Damit ist die Negation einer Aussage $\exists a : a(x)$ auch $\neg(\exists a : a(x)) = \forall a : \neg a(x)$ und umgekehrt $\neg(\forall a : a(x)) = \exists x : \neg a(x)$.

1.3 Natürliche Zahlen

Als natürliche Zahlen bezeichnet man die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$. Diese Menge schreibt man als $\mathbb{N}$. Möchte man die Null dazu nehmen, schreibt man $\mathbb{N}_0$. Insbesondere hat diese Menge ein kleinstes Element, und wenn man wiederholt die Zahl 1 dazu zählt arbeitet man alle Elemente ab. Wir können die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf dieser Menge definieren und das Ergebnis wird wieder darin liegen. Allerdings können wir es oft nicht umkehren: Für gegebenes $a, b \in \mathbb{N}$ hat $a + n = b$ nur dann eine Lösung $n \in \mathbb{N}$, wenn $b > a$. Für den Fall $a \cdot n = b$ geht das nur, wenn a ein Teiler von b ist. Bevor wir uns anderen Zahlenmengen zuwenden, betrachten wir eine wichtige Anwendung der natürlichen Zahlen.

Hier wurde bereits das "enthalten"-Zeichen $\in$ aus der Mengenschreibweise benutzt. Allgemein beschreibt eine Menge M einen Zusammenschluss von Elementen, beispielsweise $M = \{a, b, c\}$ sodass $a \in M$, $b \in M$ usw. Möchte man ein Element c ausschließen, so schreibt man $M \setminus \{c\} = \{a, b\}$. Auf diese Weise gilt, dass $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$. Außerdem können Mengen vereinigt und geschnitten werden, was mit den Operationen "$\cup$" und "$\cap$" ausgedrückt wird. Damit gilt z.B. $M = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$ und $\{a, b, c, d\} \cap \{b\} = \{b\}$.

1.3.1 Vollständige Induktion

Die Vollständige Induktion ist eine Beweistechnik für Aussagen $a(n)$ die für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten sollen. Sie besteht aus drei Schritten:

1. dem Induktionsanfang: Wir zeigen die Aussage $a(1)$ für $n = 1$
2. der Induktionshypothese: Wir stellen die Hypothese auf, dass $a(n)$ gilt
3. dem Induktionsschritt: Wir zeigen, dass $a(n) \Rightarrow a(n + 1)$

Damit ist $a(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt, wir haben eine logische Schleife $a(1) \Rightarrow a(2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow a(n - 1) \Rightarrow a(n)$ aufgebaut.

Behandeln wir ein Beispiel: Es wird behauptet, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n + 1)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Das zackige Symbol heißt Summenzeichen und ist eine Kurzschreibweise

$$\sum_{k=k_0}^{k_1} a(k) = a(k_0) + a(k_0+1) + \cdots + a(k_1)$$

für $k_1 \geq k_0$ und $= 0$ sonst (leere Summe). Als Induktionsanfang berechnen wir die linke Seite der obigen Gleichung bei $n = 1$ zu $\sum_{k=1}^{1} k = 1$ und die rechte Seite zu $\frac{1}{2}1(1+1) = 1$. Der Induktionsanfang ist also bewiesen.

Als Induktionshypothese gehen wir davon aus, dass für ein gegebenes (beliebiges, aber ab jetzt festes) n die Aussage gilt.

Als Induktionsschritt berechnen wir die Aussagen für $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

mittels der Induktionshypotehse können wir dies umschreiben

$$\frac{1}{2}n(n+1) + n + 1 = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

Das ist die Version der ursprünglichen Gleichung, die wir erhalten, wenn wir überall n durch $n+1$ ersetzen. Damit ist die vollständige Induktion gelungen.

1.4 Weitere Zahlenräume

1.4.1 Ganze Zahlen

Die ganzen Zahlen ergänzen die natürlichen Zahlen um die null und um das Negative zu jeder Zahl, $\mathbb{Z} = \{\ldots, . - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ anders als in den natürlichen Zahlen kann hier jede Addition invertiert werden, d.h. zu $a, b \in \mathbb{Z}$ ist $a - b \in \mathbb{Z}$.

1.4.2 Rationale Zahlen

Jetzt wollen wir auch noch in der Lage sein, auch die Multiplikation zu invertieren. Dazu führen wir die Menge aller Brüche ein, die Rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, p \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Damit hat $\forall a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$ die Gleichung $bq = a$ eine Lösung $q = a/b \in \mathbb{Q}$. Division durch Null ist nicht möglich.

Wir erinnern uns an die wichtigsten Rechenregeln für das Bruchrechnen, wobei wir immer fordern, dass keiner der Nenner Null wird:

1. Kürzen: ist c ein Teiler von a und b, d.h. es ex. ganze Zahlen p, q so, dass $a = cp$ und $b = cq$, dann ist
$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$
Das umgekehrte Manöver heißt Erweitern und wenn p und q teilerfremd sind heißt der Bruch vollständig gekürzt

2. Addition und Hauptnenner: Um Brüche zu addieren und zu subtrahieren wollen wir sie auf den gleichen Nenner bringen und dann die Zähler addieren
$$\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{aq}{bq} + \frac{bp}{bq} = \frac{aq + bp}{bq}$$

3. Doppelbruch: Ein Bruch aus Brüchen kann sortiert werden
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{p}{q}} = \frac{aq}{bp}.$$

Wir werden uns später noch mit Systemen linearer Gleichungen beschäftigen, wollen aber hier schon einmal den einfachen Fall von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten behandeln

$$ax + by = c$$
$$px + qy = r$$

Wir lösen die zweite Gleichung nach y auf und finden $y = (r - px)/q$, falls $q \neq 0$. Das setzen wir in die erste Gleichung ein und erhalten

$$c = ax + \frac{b}{q}(r - px) = \frac{aq - bp}{q}x + \frac{br}{q}$$

also
$$x = \frac{cq - br}{aq - bp}, \text{wenn} \quad aq \neq bp.$$

Mit dem Zwischenergebnis von oben erhalten wir

$$y = \frac{1}{q}\left(r - p\frac{cq - br}{aq - bp}\right) = \frac{raq - rbp - cpq + brp}{aq - bp}\frac{1}{q} = \frac{ra - cp}{aq - bp}.$$

1.4.3 Reelle Zahlen

Bei genauerer Untersuchung, die Sie wahrscheinlich in der Schule gemacht haben und in den Anfängervorlesungen zur Mathematik wiederholen werden, haben Sie gelernt dass es auch Zahlen wieπ, e oder $\sqrt{2}$ gibt, die sich nicht als Brüche schreiben lassen. Wenn wir die mit dazu nehmen, erhalten wir die *reellen* Zahlen (formal sind das alle Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen). In denen können wir auch Wurzeln aus Zahlen $b > 0$, ziehen, also $a^2 = b$ lösen. Dies hat sogar immer zwei Lösungen, denn $(-a)^2 = (-1)^2 a^2 = a^2$, d.h. die Wurzel ist nicht eindeutig. Als Konvention meinen wir wenn wir $a = \sqrt{b}$ schreiben immer die Lösung mit $a > 0$.

Wir können so auch allgemeinere quadratische Gleichungen lösen. Wir führen das Verfahren der quadratischen Ergänzung vor und leiten damit eine kompakte Lösungsformel her. Unsere Gleichung sei

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Wir versuchen, ein Binom ins Spiel zu bringen und schreiben

$$\begin{aligned} 0 &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Wir lösen auf zu

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Jetzt können wir die Wurzel ziehen. Der erste Term der rechten Seite ist immer nichtnegativ. Damit das auch für die ganze rechte Seite gibt, muss $b^2 > 4ac$ sein. Dann haben wir

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

bzw.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Letzteres ist die Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Jahrelang war es ein Element der Mathematikdidaktik, dies *Mitternachtsformel* zu nennen - wenn man Sie zu Mitternacht aufweckt und nach dieser Formel fragt, sollten Sie die wissen.

Wir werden unter den Teilmengen der reellen Zahlen insbesondere Intervalle oft benutzen. Ein Intervall, das die Endpunkte enthält heißt geschlossen. Für $a \leq b$ ist

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

und eines ohne die Endpunkte heißt offen

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}.$$

Daneben gibt es auch noch halboffene Intervalle wie $[a, b)$ und $(a, b]$. Wenn $a > b$ ist, ist das Intervall die leere Menge. Interessant ist der Fall $a = b$: Das geschlossene Intervall $[a, a]$ enthält genau ein Element, alle anderen sind leer.

1.4.4 Komplexe Zahlen

Jetzt wollen wir ein bisschen über den Tellerrand der Schule schauen. Wir mussten bei den reellen Zahlen die Einschränkung machen, dass wir aus negativen Zahlen keine Wurzel ziehen können. Zur Erweiterung auf die komplexen Zahlen definieren wir dies einfach: Die imaginäre Einheit i erfüllt die Eigenschaft $i^2 = -1$. Damit ist natürlich auch $(-i)^2 = -1$. Ansonsten sollen die gleichen Rechenregeln gelten, wie zwischen reellen Zahlen. Die Menge der komplexen Zahlen definieren wir als $\mathbb{C} = \{z = u + iv | u, v \in \mathbb{R}\}$. Wir nennen $u = \mathrm{Re}(z)$ und $v = \mathrm{Im}(z)$ den Real- bzw. Imaginärteil von z. Wir bezeichnen zu einer so dargestellten Zahl z die Zahl $\bar{z} = u - iv$ als zu z konjugiert komplexe Zahl. Eine weitere übliche Schreibweise für die komplexe Konjugation ist z^*. Wir können durch sie die nützlichen Identitäten

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

hinschreiben. Wenn wir zwei komplexe Zahlen $z = u + iv$ und $c = a + ib$ verknüpfen, dann ist $z \pm c = (u \pm a) + i(v \pm b)$. Bei der Multiplikation haben wir $cz = (au - bv) + i(bu + av)$. Für weitere Betrachtungen ist es nützlich zu wissen, dass $\bar{c}\bar{z} = (au - bv) - i(bv + av) = (\bar{cz})$ ist, es also nicht darauf ankommt, in welcher Reihenfolge wir konjugieren und multiplizieren. Wie wir durch eine komplexe Zahl teilen, wissen wir gerade nicht so genau, aber wir können uns behelfen durch Erweitern

$$\frac{c}{z} = \frac{c\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{au + bv + i(bu - cv)}{u^2 + v^2}.$$

Der Nutzen der komplexen Zahlen sowie weitere Eigenschaften führen wir später ein, wenn wir mit gängigen Funktionen etwas flüssiger sind.

1.5 Funktionen

1.5.1 Allgemeine Eigenschaften

Mathematik beschäftigt sich in weiten Teilen mit Abbildungen bzw. Funktionen. Eine Funktion f bildet jedes Element ihrer Definitionsmenge D auf die Wertemenge W ab. Wir schreiben das als $f : D \to W$ und für ein $x \in D$ schreiben wir für den Funktionswert, also das Bild, $f(x) \in W$. Umgekehrt nennen wir für ein $y \in W$ ein Element $x \in D$ ein *Urbild* von y wenn $f(x) = y$. Einige Spezialfälle helfen uns, diese Mengen besser zu verstehen

1. Eine Funktion heißt *injektiv*, wenn es für jedes $y \in W$ höchstens ein $x \in D$ gibt, so dass $f(x) = y$, wenn es also niemals mehr als ein Urbild gibt.

2. Eine Funktion heißt *surjektiv*, wenn es für jedes $y \in W$ ein Urbild gibt. Das kann durch eine entsprechend restriktive Definition von W sichergestellt werden, wie wir unten anhand von Beispielen illustrieren werden.

3. Eine Funktion, die injektiv und surjektiv ist heißt *bijektiv* . Ist dies der Fall, dann können wir die Funktion umkehren, d.h. es existiert eine (bijektive) Funktion $f^{-1} : W \to D$ so, dass $f^{-1}(f(x)) = x$ ist.

Wir wollen einige Beispiele untersuchen:

1. Die Gerade $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f_1(x) = ax + b$ mit $a \neq 0$ ist bijektiv und es ist $f^{-1}(y) = (y - b)/a$.

2. Die Parabel: $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f_2(x) = x^2$ ist nicht surjektiv (zu $y < 0$ existiert kein Urbild) und nicht injektiv (ist x ein Urbild zu y , dann ist es auch $-x$).

3. Wenn wir den Wertebereich der Parabel auf $\mathbb{R}_0^+$einschränken, ist $f_2$surjektiv

4. Wenn wir den Definitionbereich der Parabel auf $\mathbb{R}_0^+$ einschränken, ist f_2 injektiv

5. Wenn wir Definitions- und Wertebereich der Parabel auf $\mathbb{R}_0^+$einschränken, ist f_2 bijektiv. Die Umkehrfunktion ist $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

6. Die Funktion $f_3(x) : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\} : f_3(x) = \frac{1}{x}$ ist bijektiv und ihr eigenes Inverses.

1.5.2 Monotonie

Wir interessieren uns ob Funktionen steigen oder fallen.

- Eine Funktion heißt monoton wachsend, wenn $\forall x_{1/2} \in D$ mit $x_1 < x_2$auch $f(x_1) \leq f(x_2)$gilt.
- Eine Funktion heißt streng monoton wachsend, wenn $\forall x_{1/2} \in D$ mit $x_1 < x_2$auch $f(x_1) < f(x_2)$gilt.
- Eine Funktion heißt monoton fallend, wenn $\forall x_{1/2} \in D$ mit $x_1 < x_2$auch $f(x_1) \geq f(x_2)$gilt.
- Eine Funktion heißt streng monoton fallend, wenn $\forall x_{1/2} \in D$ mit $x_1 < x_2$auch $f(x_1) > f(x_2)$gilt.

Betrachten wir wieder die Beispiele von oben. Wir haben

$$f_1(x_2) - f_1(x_1) = a(x_2 - x_1).$$

Wenn $x_2 > x_1$ist, dann ist dieser Ausdruck > 0 wenn $a > 0$ und < 0 wenn $a < 0$ ist (erinnern Sie sich daran, dass eine Ungleichung sich umdreht, wenn man mit einer negativen Zahl multipliziert / dividiert). Die Funktion ist in diesen Fällen also streng wachsend / fallend. Für f_2 können wir berechnen $f_2(x_2) - f_2(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$. Nach Vorgabe ist der zweite Faktor positiv, es hängt also vom Vorzeichen von $x_1 + x_2$ab - die Funktion ist streng wachsend auf $\mathbb{R}_0^+$ / streng fallend auf $\mathbb{R}_0^-$.

1.5.3 Symmetrie

Eine Reihe der Probleme in der Mathematik, aber auch in der Physik, werden viel einfacher, wenn man die ihnen zugrundeliegende Symmetrie ausnutzen kann. Wir interessieren uns hier für die Symmetrie um den Ursprung. Eine Funktion heißt *symmetrisch* bzw. *gerade* , wenn $f(-x) = f(x)$ und *antisymmetrisch* bzw. *ungerade* wenn $f(-x) = -f(x)$. Wenn wir eine Funktion f gegeben haben, dann ist für alle x bei denen $\pm x$ im Definitionsbereich liegen die Funktion $f_g = f(x) + f(-x)$ gerade und $f_u = f(x) - f(-x)$ ungerade.

In unseren obigen Beispielen ist f_2 gerade, f_3 ist ungerade. f_1 hat im Allgemeinen keine keine Symmetrie. Nur in den Spezialfällen $b = 0$ (ungerade) und $a = 0$ (gerade) ist sie symmetrisch.

1.5.4 Verkettung

Wenn wir eine Funktion $f : A \to B$ haben und $g = B \to C$ dann können wir eine Funktion $h = g \circ f$ als Verkettung definieren. Es geht $h : A \to C$ und es ist $h(x) = g(f(x))$. Wir lesen die Verkettung von rechts nach links. Und auf die Reihenfolge kommt es an. So ist $f_1(f_2(x)) = ax^2 + b$ während $f_2(f_1(x)) = (ax + b)^2$ist. Bei praktischen Verkettungen müssen vor allen Dingen diese Mengen genau überprüft werden.

1.5.5 Stetigkeit für Fußgänger

Während die Eigenschaften bisher rein auf der Algebra beruhten, lugen wir jetzt etwas in die Analysis herein, die uns in der zweiten Woche noch sehr stark beschäftigen wird - mit dem Begriff der Stetigkeit. Die hemdsärmlige Definition von Stetigkeit ist, dass sich die Funktion mit einem Strich durchzeichnen lässt. In der Praxis können Funktionen also vor allen Dingen eine Reihe von *Unstetigkeitsstellen* haben, die wir hier näher charakterisieren möchten:

Endlicher Sprung Ein endlicher Sprung tritt auf, wenn die Funktion an der Unstetigkeitsstelle (dann auch Sprungstelle genannt) nicht ins Unendliche läuft.

Ein Beispiel ist die sog. Signumsfunktion

$$f(x) = \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

die einen Sprung bei $x = 0$ aufweist.

Polstelle Eine Polstelle ist eine Unstetigkeit, an der eine Funktion ins Unendliche läuft. So hat z.B. $1/x$ eine Polstelle bei $x_0 = 0$. Formal kann man eine Polstelle dadurch identifizieren, dass dort die Funktion $1/f$ gegen Null geht. Noch präziser redet man von einer Polstelle n-ter Ordnung bei x_0, wenn $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ und $h(x)$ eine Nullstelle n-ter Ordnung bei x_0 besitzt.

Hebbare Polstellen Manchmal gibt es Löcher im Definitionsbereich, durch die sich die Funktion eigentlich gerade durchzeichnen ließe. Ein praktisch wichtiges Beispiel dafür ist die *hebbare Polstelle.* Diese entsteht, wenn der Nenner und der Zähler einer Funktion gleichzeitig und in gleicher Ordnung gegen Null gehen. Ein Beispiel ist

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x-2}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x+1}.$$

Diese Funktion hat eine hebbare Polstelle bei $x = 2$ und einen Pol erster Ordnung bei $x = -1$.

1.5.6 Stetigkeit und Konvergenz

Die präzise Version der Stetigkeit kann über Folgen und Konvergenz konstruiert werden. Das werden Sie im ersten Semester in großem Detail machen (und Teile davon haben Sie schon in der Schule gesehen). Wir wollen hier nur die wichtigsten Aussagen wiederholen.

Wir starten von Zahlenfolgen (a_n), $n \in \mathbb{N}$. Diese heißen *konvergent,* mit Grenzwert a, wenn sie für großes n dem Wert a beliebig nahe kommt. Dabei muss a nicht zwingend exakt erreicht werden. Mathematisch sagt man: Für jeden vorgegebene $\epsilon > 0$ existiert ein n so dass $\forall k > n: \; |a_k - a| < \epsilon$. Wir schreiben dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Was hat das mit der Stetigkeit einer Funktion zu tun? Die Regel „mit einer Linie durchzeichnen“ ist äquivalent zu der Regel „egal, wie ich auf meinen Punkt x_0 zulaufe, es kommt immer der gleiche Grenzwert heraus“. Mathematisch ist also eine Funktion stetig wenn für jede Zahlenfolge $(x_n) \subset D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f_0$ ist. Wenn $x_0 \in D$ dann ist $f_0 = f(x_0)$. Man schreibt dann auch $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_n) = f_0$.

Für die Physik reicht meist die Fußgänger-Definition. In der Mathematik nimmt man gerne als Beispiel die Funktion $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ an der Stelle $x = 0$. Wählen wir $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ dann ist $f(x_n) = 0$ und wählen wir stattdessen die Folge $\xi_n = \dfrac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$ dann ist $f(\xi_n) = 1$, obwohl beide Folgen gegen null gehen.

1.6 Elementare Funktionen

Wir wollen jetzt Beispiele von Funktionen kennenlernen, auf die wir im nächsten Kapitel auch immer wieder zurückkommen werden, sowie Rechentechniken, die für diese Funktionen wichtig sind. Diese bilden den Kanon der *elementaren Funktionen.* Natürlich ist das noch lange nicht alles, es gibt auch eine Reihe *spezieller Funktionen.* Die Unterteilung in diese Gruppe ist weitestgehend willkürlich. Funktionen werden definiert, weil sie einfache mathematische Beziehungen wiedergeben und/oder weil sie eine wichtige Aufgabe aus der Mathematik oder ihren Anwendungen - oft in der Physik - lösen. Auch in den Vorlesungen des Zyklus der theoretischen Physik werden Sie spezielle Funktionen anhand von Anwendungen kennenlernen.

1.6.1 Polynome

Eine Funktion

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad a_n \neq 0$$

nennen wir Polynom vom Grad n. Den Spezialfall $f(x) = a_n x^n$ nennen wir Monom. Der maximale Definitionsbereich eines Polynoms ist ganz $\mathbb{R}$ und es ist dort überall stetig. Genau dann wenn in einem Polynom nur gerade Potenzen auftreten

$$f_g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} x^{2k} \quad \Leftrightarrow \quad f_g(-x) = f_g(x)$$

und die analoge Aussage gilt im ungeraden Fall

$$f_u(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} x^{2k+1} \quad \Leftrightarrow \quad f_u(-x) = -f_u(x).$$

1.6.2 Gebrochenrationale Funktionen

Wenn die Funktionen p, q Polynome sind, dann nennen wir deren Bruch

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

eine gebrochenrationale Funktion. Gemeinsam mit den Polynomen bilden diese die Menge der rationalen Funktionen. Der maximale Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$ bis auf die Nullestellen von $q(x)$. Dort treten Singularitäten auf.

1.6.2.1 Verhalten im Unendlichen

Wir betrachten zwei Polynome, $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_n \neq 0$ und Grad n und $q(x) = \sum\limits_{l=0}^{m} b_l x^k$ mit $b_m \neq 0$ und Grad m. Dann können wir für alle x schreiben

$$p(x) = x^n u(x) \quad \text{mit} \quad u(x) = a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots \frac{a_0}{x^n} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} u(x) = a_n$$

und genauso

$$q(x) = x^m v(x) \quad \text{mit} \quad v(x) = b_m + \frac{b_{n-1}}{x} + \ldots \frac{b_0}{x^m} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} v(x) = b_n.$$

Mit Hilfe dieser beiden Hilfsfunktionen $u(x)$ und $v(x)$ können wir die Funktion $f(x)$ schreiben als

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = x^{n-m} \frac{u(x)}{v(x)}$$

In dieser Darstellung können wir drei verschiedene Sorten von Verhalten im Unendlichen feststellen:

$\boxed{n = m}$ $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = \lim\limits_{|x| \to \infty} \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{a_n}{b_m} = \dfrac{a_n}{b_n}$

$\boxed{n < m}$ $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = \lim\limits_{|x| \to \infty} \dfrac{u(x)}{x^{-n+m} v(x)} = 0$

$\boxed{n > m}$ $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = \pm\infty$ abhängig davon, ob $\dfrac{a_n}{b_m}$ und ob $n - m$ gerade oder ungerade ist.

Es gibt zwei wichtige Techniken zur Umformung von gebrochenrationalen Funktionen.

1.6.2.2 Polynomdivision

Mit dieser Technik lässt sich ein Polynom von einer rationalen Funktion abspalten. Sie funktioniert, wenn der Grad von p größer als der von q ist. Wir suchen eine Lösung der Gleichung

$$p(x) = q(x)h(x) + r(x)$$

wobei h und r auch Polynome sind und der Grad von $r(x)$ kleiner als der von $q(x)$ ist. $r(x)$ ist der Divisionsrest. Wir schreiben

$$q(x) = \sum_{k=0}^{r} q_k x^k \quad p(x) = \sum_{k=0}^{r+s} p_k x^k \quad h(x) = \sum_{k=0}^{s} h_k x^k \quad s \geq 0.$$

Wir beginnen beim Term mit der höchsten Potenz. Das kann nach Konstruktion nur aufgehen, mit $h_s = p_{r+s}/q_r$. Wir berechnen

$$r_s(x) = p(x) - q(x) h_s x^s.$$

Dies ist ein Polynom vom Grad $r{+}s{-}1$. Wenn wir jetzt in der Konstruktion oben $p(x)$ durch r_s ersetzen, können wir den Schritt wiederholen und erhalten h_{s-1} und so weiter, bis wir das ganze $h(s)$ haben. Eine solche Regel, die wir immer wiederholen und in sich selbst einsetzen, nennen wir *Rekursion.* Sie endet, wenn $s = -1$ ist.

Als Beispiel betrachten wir den Fall $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ und $q(x) = x^2 - 3x + 2$. Damit ist $h(x)$ ein Polynom zweiter Ordnung. Wir haben $h_2 = 1$ und

$$r_3 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - x^2(x^2 - 3x + 2) = 4x^3 - x^2 + x + 1.$$

Damit finden wir $h_1 = 4$ und

$$r_2 = 4x^3 - x^2 + x + 1 - 4x(x^2 - 3x + 2) = 11x^2 - 7x + 1.$$

Damit ist $h_0 = 11$. Der Divisionsrest ist

$$r = 11x^2 - 7x + 1 - 11(x^2 - 3x + 2) = 26x - 21.$$

Damit haben wir die Polynomdivision gelöst

$$p(x) = q(x)(x^2 + 4x + 11) + 26x - 21.$$

1.6.2.3 Parzialbruchzerlegung: Nichtentarteter Fall

Eine wichtige Technik zur Zerlegung von Rationalen Funktionen deren Nennergrad größer ist als der Zählergrad also z.B. nach einer Polynomdivision zur Vereinfachung des Divisionsrestes. Wir gehen davon aus, dass der führende Term des Nenners = 1 ist (indem wir einen Vorfaktor abspalten) und dass die Nullstellen alle verschieden sind. Damit können wir Schreiben

$$q(x) = \prod_{k=1}^{r} (x - x_k) \quad x_k \neq x_l \text{ für } k \neq l.$$

Hier haben wir das Produktzeichen $\prod$ eingeführt, das ähnlich wie das Summenzeichen ein Produkt symbolisiert. Wir bezeichnen folgende Umformung als *Parzialbruchzerlegung*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{r_k}{x - x_k}.$$

Die Aufgabe ist es jetzt, die Koeffizienten r_k (genannt *Residuen*) zu finden. Wir wählen ein $n \leq k$ beliebig aber fest aus und multiplizieren die Gleichung links und rechts mit $(x - x_n)$. Wir führen dann den Grenzübergang $x \to x_n$ durch. Auf der linken Seite steht

$$\lim_{x \to x_n} (x - x_n) \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to x_n} \frac{(x - x_n)p(x)}{\prod_k (x - x_k)} = \lim_{x \to x_n} \frac{p(x)}{\prod_{k \neq n} (x - x_k)} = \frac{p(x_n)}{\prod_{k \neq n} (x_n - x_k)}.$$

Im zweiten Schritt haben wir die Nullstellenzerlegung von $q(x)$ ausgenutzt und den letzten Schritt können wir nur durchführen, weil alle Nullstellen verschieden sind. Die rechte Seite der obigen Gleichung ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_n} (x - x_n) \sum_k \frac{r_k}{x - x_k} &= \lim_{x \to x_n} \sum_k \frac{r_k(x - x_n)}{x - x_k} \\
&= \lim_{x \to x_n} \left[\sum_{k \neq n} \frac{r_k(x - x_n)}{x - x_k} + r_n \frac{x - x_n}{x - x_n} \right] = \sum_{k \neq n} 0 + r_n \\
&= r_n.
\end{aligned}$$

Hier haben wir im letzten Schritt wiederum ausgenutzt, dass alle Nullstellen verschieden sind. Gleichsetzen liefert

$$r_n = \frac{p(x_n)}{\prod_{k \neq n} (x_n - x_k)}.$$

Dies zeigt auch, das die Parzialbruchzerlegung immer funktioniert.

Wir betrachten das Beispiel von oben: $p(x) = 30x - 21$ und $q(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$. Wir finden also $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. Damit ist

$$r_1 = \frac{30 - 21}{1 - 2} = -9$$

und

$$r_2 = \frac{60 - 21}{2 - 1} = 39.$$

Wir haben also

$$\frac{30x - 21}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-9}{x - 1} + \frac{39}{x - 2}$$

gezeigt.

1.6.2.4 Parzialbruchzerlegung: Allgemeiner Fall

Unsere Parzialbruchzerlegung beruhte darauf, dass wir den Nenner als ein Produkt von Nullstellenfaktoren mit paarweise verschiedenen Nullstellen zerlegen konnten. Was passiert, wenn das nicht geht? Eine Panne könnte sein, dass das Polynom vom Grad n weniger als n Nullstellen hat - es kann z.B. eine Parabel immer oberhalb der x- Achse liegen wie $x^2 + 1$. Im Fall der Parabel haben wir schon gelernt, dass wir im Zweifel immer komplexe Zahlen als Nullstellen finden können - im Beispiel wäre $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$. Erfreulicherweise geht das für Polynome beliebigen Grades! Dieses Ergebnis heißt *Fundamentalsatz der Algebra* und wird in einer Ihrer Mathematikvorlesungen mit recht großem Aufwand bewiesen.

Das Andere, was schief gehen kann ist, dass Nennernullstellen zusammenfallen - es treten Pole höherer Ordnung auf. Diese müssen wir zuerst behandeln: Sei x_1 eine Nennernullstelle der Ordnung $s > 1$. Dann setzen wir an

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{r_s}{(x - x_1)^s} + h(x)$$

wobei $h(x)$ eine rationale Funktion ist, deren Nenner bei x_1 höchstens eine Nennernullstelle vom Grad $s - 1$ hat. Wir multiplizieren diese Gleichung mit $(x - x_1)^s$ und bilden wie gewohnt den Grenzwert um zu erhalten

$$r_s = \lim_{x \to x_1} \left[(x - x_1)^s \frac{p(x)}{q(x)} \right]$$

wobei die rechte Seite per Konstruktion konvergiert. Dies wiederholen wir mit $h(x)$ bis die Nennernullstellen alle abgespalten sind.

Als Beispiel betrachten wir

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{30x - 21}{(x - 1)^2}.$$

Wir schreiben

$$r_2 = \lim_{x \to 1} (30x - 21) = 9$$

und erhalten

$$h(x) = \frac{30x - 21}{(x - 1)^2} - \frac{9}{(x - 1)^2} = \frac{30}{x - 1}.$$

Die Parzialbruchzerlegung ist also

$$\frac{30x - 21}{(x - 1)^2} = \frac{9}{(x - 1)^2} + \frac{30}{x - 1}.$$

1.6.3 Algebraische Funktionen

Bis jetzt haben wir uns mit ganzzahligen Exponenten unserer Variable x beschäftigt. Jetzt wollen wir beliebige (reelle) Exponenten zulassen. Wir haben bereits die Quadratwurzel $\sqrt{\cdot}$ als Umkehrfunktion von x^2 kennengelernt. Um der aus der Schule bekannten Potenzformel $(x^p)^q = x^{(pq)}$ gerecht zu werden identifizieren wir $\sqrt{x} = x^{1/2}$. Das Gleiche können wir mit den Umkehrfunktionen beliebiger Monome x^q machen und erhalten so $x^{1/q} =^q \sqrt{x}$. Damit können wir für rationale Exponenten definieren dass $x^{(p/q)} =^q \sqrt{x^p}$. Wenn wir jetzt einen reellen Exponenten haben, x^r , dann können wir diesen Ausdruck dadurch auswerten, dass wir den Exponenten beliebig gut durch eine rationale Zahl nähern.

Wenn wir allgemeine algebraische Funktionen wie $f(x) = x^r$ anschauen, dann können wir deutlich weniger sagen als für rationale Funktionen. Im Allgemeinen müssen wir für den Definitionsbereich beachten, dass $x \geq 0$ ist.

1.6.4 Die Exponenzialfunktion und der Logarithmus

Jenseits der rationalen und algebraischen Funktionen spricht man den (etwas altmodischen) Ausdruck der *transzendentalen Funktion.* Wir starten mit der Exponenzialfunktion, gegeben für ein beliebiges $a > 0$ als $f(x) = a^x$. Anders als bei rationalen Funktionen ist hier also nicht die Basis sondern der Exponent unsere Variable. Klarerweise ist

$$f(x+1) = af(x) \quad f(1) = a \quad f(0) = 1$$

Allgemein ist nach den Rechenregeln für Potenzen auch

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x a^y = f(x)f(y).$$

Daraus kann man leicht sehen, dass $f(x)$ streng wachsend ist für $a > 1$ und streng fallend für $a < 1$. Für $a = 1$ ist $f(x) = 1$ konstant.

Wir können aufgrund dieser Rechenregeln zeigen, dass

$$1 = f(0) = f(x-x) = f(x)f(-x) \;\Rightarrow\; f(-x) = 1/f(x)$$

Der Wertebereich von $f(x)$ ist damit $\mathbb{R}^+$ - insbesondere ist für $a > 1$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ und für $x \to \infty$ geht $f(x)$ gegen ∞ .

Als streng monotone Funktion ist die Exponenzialfunktion auf ihrem gesamten Wertebereich umkehrbar. Die Umkehrfunktion heißt Logarithmus zur Basis a $\log_a x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ . . Die Rechenregeln für die Exponenzialfunktion drehen sich um zu

$$\log_a a = 1 \quad \log_a 1 = 0 \quad \log_a x^y = y \log x \quad \log_a 1/x = -\log_a x.$$

Aus den Potenzgesetzen ergibt sich

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad \log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y.$$

Wir können auch leicht zeigen, wie man die Basis wechselt. Wir verifizieren

$$a^{\log_a x} = x = b^{\log_b x} = a^{\log_a (b^{\log_b x})} = a^{(\log_b x)(\log_a b)}$$

also

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Eine besondere Basis für Exponenzialfunktion und Logartihmus ist die (irrationale) Eulersche Zahl $e \simeq 2.718\ldots$. Den Logarithmus zu dieser Basis nennt man auch natürlichen Logarithmus $\log_e \equiv \ln$. Was diese Zahl besonders macht könnten wir hier schon mit den Mitteln der Algebra erschließen (und das werden sie in einer Ihrer ersten Mathematikvorlesungen auch tun) - im Vorkurs verschieben wir dieses Argument aber auf das Kapitel Analysis.

1.6.5 Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen werden im Allgemeinen anhand rechtwinkliger Dreiecke eingeführt. Hier messen wir Winkel stets im Bogenmaß. Es ist für Winkel $0 \leq x \leq \pi/2$

$$\sin x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad \cos x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}.$$

Damit wird aus dem Satz von Pythagoras sofort

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

und durch Spielegung des Dreiecks sieht man $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Die Funktionen sind damit auch beschränkt, $|\sin x|, |\cos x| \leq 1$ wobei $\cos 0 = \sin \pi/2 = 1$ ist. Was passiert bei kleinem x ? Dann ist die Bogenlänge etwa gleich der Gegenkathete und wir haben $\sin x \simeq x$ (später lernen wir eine bessere Schreibweise). Aus dem Pythagoras folgt $\cos^2 x \simeq 1 - x^2/2$.

Was machen wir für $x$außerhalb des durch einfache Dreiecke beschreibbaren Bereiches? Klar ist, dass Überschreiten des Winkels um eine volle Drehung nichts ändert, die Funktionen sind also 2πPeriodisch

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Wenn wir den Winkel auf negative Werte drehen, änder auch die Gegenkathete ihre Orientierung, die Ankatehete aber nicht. Damit haben wir

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \cos(-x) = \cos x.$$

Damit ergeben sich die bekannten Funktionsgraphen. Insbesondere ergeben sich folgende spezielle Werte für $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \sin(n\pi) &= 0 & \cos(\pi(n+1/2)) &= 0 \\ \sin\left(\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)\right) &= 1 & \sin\left(\pi\left(2n-\frac{1}{2}\right)\right) &= -1 \\ \cos(2\pi n) &= 1 & \cos\left(\pi\left(2n+1\right)\right) &= -1 \end{aligned}$$

Zusätzlich gibt es noch die Tangensfunktion

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Auch diese ist 2π-periodisch. Der Tangens hat einfache Pole an den Nullstellen des Kosinus und ist ungerade. Seltener wird auch der Kotangens

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

verwendet.

Durch den periodischen Charakter sind die trigonometrischen Funktionen nur auf Intervallen umkehrbar. Diese können mit einer gewissen Freiheit gewählt werden - man sagt, sie haben mehrere Äste. Die Umkehrfunktion des Sinus heißt Arcussinus

$$\sin^{-1} x = \arcsin x : \ [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

und analog haben wir Arcuskosinus und Arcustangens

$$\begin{aligned} \arccos x &: \ [-1:1] \to [0:\pi] \\ \arctan x &: \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}:\frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

1.6.6 Hyperbelfunktionen

Diese Funktionen haben Sie evtl. in der Schule noch nicht gesehen, sie sind aber ganz einfach. Wir definieren den Sinus Hyperbolicus und den Cosinus Hyperbolicus als

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \quad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

sowie den Tangens Hyperbolicus

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Diese Funktionen sind nicht periodisch. Der cosh ist gerade, der sinh ist ungerade. Sie sind auf $\mathbb{R}$ definiert und haben keine Singularitäten. Für $x \to \pm\infty$ dominiert jeweils eine der Exponenzialfunktionen und $\cosh x \to \infty$, $\sinh x \to \pm\infty$. Beim Tangens gleichen sich diese aus, also ist

$$\lim_{x \to \pm\infty} \tanh x = \pm 1.$$

Der Sinus Hyperbolicus ist invertiertbar auf $\mathbb{R}$, der Kosinus auf $\mathbb{R}_+$. Wir können die Umkehrfunktionen, genannt Areasinus/kosinus Hyperbolicus durch Logarithmen darstellen. Als Beispiel betrachten wir den sinh

$$y = \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \ \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in der Variablen e^x mit Lösung

$$e^x = \frac{1}{2}\left(2y \pm \sqrt{4y^2+4}\right) = y + \sqrt{y^2+1}$$

wobei wir im letzten Schritt uns für die positive Lösung wählen müssen. Damit ist

$$\mathrm{Arsinh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

Wir sehen durchaus Analogien zwischen den trigonometrischen und den Hyperbelfunktionen aber die sieht auf ersten Blick etwas zu schwach aus, um diese Namensgebung zu rechtfertigen. Wir werden später eine deutlich engere Beziehung zwischen diesen Funktionen sehen.