Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik Ia

WS 2018-2019 **Blatt 10** **19.12.2018**

Aufgabe 42 *Eigenwerte und Eigenvektoren (und mehr)*

Für jede der folgenden Matrizen M

1. zerlegen Sie M in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil;
2. berechnen Sie die Spur von M;
3. berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von M;
4. bestimmen Sie die Matrix P, welche M diagonalisiert: $D = P^{-1}MP$, wobei D diagonal ist;
5. berechnen Sie die Spur von D.

a)

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(*3 Punkte*)

b)

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(*3 Punkte*)

c)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(*2 Punkte*)

d)

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(*3 Punkte*)

e) Betrachten Sie den Vektor $\boldsymbol{x} = (0, -4, -1)$ und die Matrix M aus Teil a). Schreiben Sie $\boldsymbol{x}$ und $M\boldsymbol{x}$ in der Basis aus Eigenvektoren von M. (*2 Punkte*)

Beweisen außerdem die folgenden Eigenschaften der Spur:

f) für alle quadratische Matrizen A und B gilt $\mathrm{Tr}\{AB\} = \mathrm{Tr}\{BA\}$ *(1 Punkt)*

g) für jede Matrix A mit $D = P^{-1}AP$, d.h. A is diagonalisierbar mit Diagonalmatrix D, gilt $\mathrm{Tr}\{A\} = \mathrm{Tr}\{D\}$. *(1 Punkt)*

Aufgabe 43 *Basiswechsel*

Betrachten Sie die kanonische Basis $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ und die Basis $\mathcal{B} = \{2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1\}$ von $\mathbb{R}^2$. Sei F die orthogonale Projection auf $\mathrm{Span}\{2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\}$.

a) Zeichen Sie eine Skizze der zwei Basen in einer Ebene und der Projektion F. *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie die Matrix des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ und umgekehrt; und multiplizieren Sie sie miteinander. *(2 Punkte)*

c) Bestimmen Sie die zu der linearen Abbildung F gehörigen Matrix in der Basis $\mathcal{A}$. *(1 Punkt)*

d) Bestimmen Sie die zu der linearen Abbildung F gehörigen Matrix in der Basis $\mathcal{B}$. *(1 Punkt)*

e) Bestimmen Sie die Basis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^2$, welche aus der kanonischen Basis $\mathcal{A}$ durch eine Rotation gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel $\pi/3$ hervorgeht. *(2 Punkte)*

f) Bestimmen Sie die Matrix des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{C}$ und umgekehrt. *(2 Punkte)*

g) Bestimmen Sie die zur Abbildung F zugehörigen Matrix in der Basis $\mathcal{C}$. *(2 Punkte)*

Aufgabe 44 *Berechnung der Inversen einer Matrix*

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}.$$

a) Stellen Sie fest ob A invertierbar ist. *(1 Punkt)*

b) Wenden Sie das Eliminationsverfahren auf das Schema $A|I$ an, wobei I die Einheitsmatrix ist:

$$A|I = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Dies bedeutet, dass Sie die gleichen Zeilen- und/oder Spaltenoperationen auf beide Matrizen anwenden müssen bis die linke Matrix der Einheitsmatrix entspricht, d.h. bis das Schema die Form $I|B$ hat.

c) Überprüfen Sie, dass B die Inverse von A ist. *(1 Punkt)*