Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik Ia

WS 2018-2019 **Blatt 11** **11.01.2019**

Aufgabe 45 *Trägheitstensor*

Betrachten Sie einen flachen Festkörper in Dreiecksform mit gleichmäßiger Dichte $\rho = M/S$, wobei M die Masse und $S = a^2/2$ die Fläche des Körpers sind. Das Dreieck ist gleichseitig und rechtwinklig und a ist die Länge einer der Seiten mit gleicher Länge. Wir wählen die Ecke des rechten Winkels als Ursprung des Koordinatensystems. Die x- und y-Achse sind entlang der gleichen Seiten des Dreiecks und die z-Achse senkrecht zu der Dreiecksfläche (s. Abb. 1).

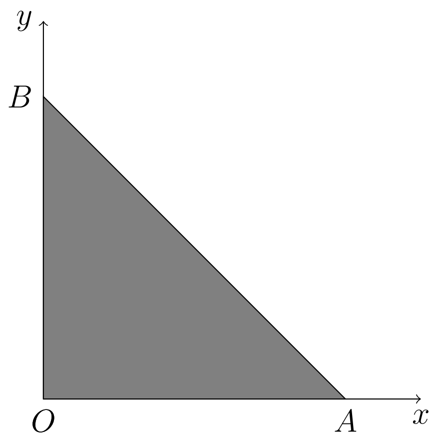

Abbildung 1: Skizze des Festkörpers: ein rechtwinklinges gleichseitiges Dreieck in der $x - y$ Ebene mit den Seitenlängen $|OA| = |OB| = a$. Die Massedichte $\rho(\mathbf{r})$ ist innerhalb des Dreiecks gleichmäßig M/S und verschwindet außerhalb des Dreiecks.

Der *Trägheitstensor* ist durch

$$I = \int_V \rho(\boldsymbol{r}) \left[(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}) \mathbb{1}_3 - \boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{r} \right] \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \tag{1}$$

gegeben, wobei hier $\mathbb{1}_3$ die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^3$, "$\cdot$" das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$ und "$\otimes$" das dyadische Produkt darstellt. Das dyadische Produkt von zwei Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist eine Matrix $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, welche durch $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$ gegeben ist. Beachten Sie, dass der Trägheitstensor eine 3×3 Matrix ist.

a) Berechnen Sie den Trägheitstensor für das Dreieck OAB wie es in Abb. 1 gezeigt ist.

(*3 Punkte*)

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von I. Die Eigenwerte werden als *Hauptträgheitsmomente* und die Eigenvektoren als *Hauptträgheitsachsen* bezeichnet.

(*2 Punkte*)

c) Berechnen sie die Basistransformation von der ursprünglichen Basis (s. Abb. 1) zu den Hauptträgheitsachsen.

(2 Punkte)

d) Das Dreieck rotiere jetzt um die z-Achse mit Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}^T = (0, 0, \omega)$. Berechnen Sie die kinetische Energie in der ursprünglichen Basis (s. Abb. 1) und der Basis, welche durch die Hauptträgheitsachsen gegeben ist. *(1 Punkt)*
Hinweis: Die kinetische Energie ist durch $K = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T I \boldsymbol{\omega}$ gegeben, wobei I und $\boldsymbol{\omega}$ in der jeweils gleichen Basis darzustellen sind.

Aufgabe 46 *Schwerpunkt eines Seiltänzers*

Berechnen Sie den Schwerpunkt eines Seiltänzers mit Balancierstange. Der Seiltänzer wird durch das Kurvenstück $C_1 = \{(0, t) | 0 \leq t \leq 1.8\}$ (sehr schematisch) beschrieben, es soll die Massendichte $\mu_1 = 32$ haben. Die Balancierstange ist gegeben durch $C_2 = \{(t, 1.2 - 0.05t^2) | |t| \leq -4\}$ und $\mu_2 = 2$. *(3 Punkte)*
Hinweis: Die Gesamtmasse ist durch $M = \int_C \rho(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}s$ gegeben, wobei $\rho(\boldsymbol{r})$ die Massendichte entlang der Kurve $C = C_1 \cup C_2$ ist. Hier ist $\mathrm{d}s$ das infinitesimale Linienelement. Der Schwerpunkt des Systems ist durch $\boldsymbol{R} = M^{-1} \int_C \rho(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{r} \mathrm{d}s$ gegeben.

Aufgabe 47

Ein Massenpunkt im Ursprung erzeugt ein Gravitationsfeld, das bis auf einen konstanten Faktor durch

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^3} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{für } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0}$$

gegeben ist. Wird ein weiterer Massenpunkt der Masse 1 in diesem Gravitationsfeld längs einer Kurve $\boldsymbol{\alpha} : [a, b] \to \mathbb{R}^3 \backslash \{\boldsymbol{0}\}$ bewegt, so ist die an diesem geleistete *Arbeit* das Wegintegral

$$-\int_{\boldsymbol{\alpha}} K_{\tan} \mathrm{d}s = -\int_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

a) Zeigen Sie, dass in diesem Kraftfeld längs geschlossener Wege ($\boldsymbol{\alpha}(a) = \boldsymbol{\alpha}(b)$) keine Arbeit geleistet wird. *(3 Punkte)*
Hinweise: Schreiben Sie $\int_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ in der Form $\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ldots)\mathrm{d}t$.

b) Zeigen Sie, dass jedes Zentralfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = k(r)\boldsymbol{x}$ mit einer stetigen Funktion k von $r = \|\boldsymbol{x}\| > 0$ ein Potential besitzt. Das bedeutet es existiert ein $U(\boldsymbol{x})$, welches $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{x})$ erfüllt. *(2 Punkte)*
Hinweis: Machen Sie den Ansatz $U(\boldsymbol{x}) = u(r)$.

Aufgabe 48 *Kreuzprodukt*

a) Gegeben seien zwei Vektoren $\boldsymbol{v}_1$ and $\boldsymbol{v}_2$ im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass die Länge des Kreuzproduktes der beiden Vektoren $\|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2\|$ der Fläche des von ihnen aufgespannten Parallelogramms entspricht. *(2 Punkte)*
Hinweis: Argumentieren Sie wieso es hinreichend ist dies für den Fall $\boldsymbol{v}_1 = (a, 0, 0)$ und $\boldsymbol{v}_2 = (b, c, 0)$ zu zeigen.

b) Gegeben sei eine Flächenparametrisierung $\boldsymbol{\phi} : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{\phi}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \phi_1(u_1, u_2) \\ \phi_2(u_1, u_2) \\ \phi_3(u_1, u_2) \end{pmatrix}.$$

Des Weiteren seien

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{\partial}{\partial u_i}\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_i}\phi_1 \\ \frac{\partial}{\partial u_i}\phi_2 \\ \frac{\partial}{\partial u_i}\phi_3 \end{pmatrix}, \quad g_{ik} = \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_k \rangle \quad \text{für } i, k = 1, 2;$$

und

$$g = \det(g_{ik}) = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}.$$

Dabei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass $\|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2\| = \sqrt{g}$. *(2 Punkte)*