Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik Ia

WS 2018-2019 **Blatt 13** **31.01.2019**

Aufgabe 53 *Differentialgleichungen 1. Ordnung*

Verwenden Sie Separation der Variablen oder Variation der Konstanten zur Lösung der folgenden Differentialgleichungen für $y(t)$. Wir benutzen die Notation $y'(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$.

a)

$$\begin{cases} y'(t) = 2(t+1)y(t)^{2/3} \\ y(1) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

(*2 Punkte*)

b)

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{\cos^2 y(t)}{1+t^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

für $y(t) \in [-\pi/2, \pi/2]$. (*2 Punkte*)

c) **Bonusaufgabe***

$$\begin{cases} y'(t) = ky(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{3}$$

(*3 Punkte*)

wobei $k, K, y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Konstanten sind.

d)

$$\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = \ln(1 + e^{2t}) \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

(*2 Punkte*)

e) **Bonusaufgabe***

$$\begin{cases} y'(t) + ty(t) = e^{-t^2/2}\sin t \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

(*3 Punkte*)

*** Durch die Lösung der Teilaufgaben c) und e) können Sie Bonuspunkte für die Klausurzulassung erwerben.**

Aufgabe 54 *Homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten*
Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen für $y(t)$.

a)

$$\begin{cases} y'''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 2, \end{cases} \tag{6}$$

(*3 Punkte*)

b)

$$\begin{cases} y'''(t) - 2y'(t) - 4y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 2. \end{cases} \tag{7}$$

(*3 Punkte*)

Aufgabe 55 *Delta-Funktion*
In der Vorlesung wurde die Delta-Funktion $\delta(x)$ eingeführt. Sie hat die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) \mathrm{d}x = f(x_0). \tag{8}$$

a) Beweisen Sie, dass die Funktionenfolge

$$d_l(x) = \begin{cases} 1/l & -l/2 \leq x \leq l/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $l \to 0$ formal gegen die Delta-Funktion konvergiert. (*2 Punkte*)

b) Zeigen Sie: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - x_0) f(x) \mathrm{d}x = -f'(x_0)$. (*2 Punkte*)

c) Zeigen Sie: $\delta(x - x_0) = \Theta'(x - x_0)$ mit der Heaviside-Funktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

(*2 Punkte*)

d) Gegeben sei die Definition

$$u_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon^2}} e^{-x^2/(2\epsilon^2)}. \tag{9}$$

Nehmen Sie an, dass $f(x)$ eine analytische Funktion ist und zeigen Sie, dass gilt

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} u_\epsilon(x - x_0) f(x) \mathrm{d}x = f(x_0).$$

(3 Punkte)

Aufgabe 56 *Green'sche Funktion eines getriebenen, gedämpften harmonischen Oszillators*

Ein gedämpfter harmonischer Oszillator, der durch die Kraft $f(t)$ getrieben wird, kann durch die Differentialgleichung

$$y''(t) + 2\gamma y'(t) + \omega_0^2 y(t) = f(t) \tag{10}$$

beschrieben werden. Hierbei ist γ der Dämpfungskoeffizient und ω_0 die Kreisfrequenz des Oszillators im ungedämpften Fall.

a) Bestimmen Sie die Gleichung für die Green'sche Funktion $G(t, t')$, so dass

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' G(t, t') f(t')$$

gilt und berechnen Sie die Lösung für $t \neq t'$. *(3 Punkte)*

b) Nehmen Sie an, dass $G(t, t') = 0$ für $t \leq t'$ gilt. Dies kann als Kausalitätsrelation betrachtet werden. Verwenden Sie die Stetigkeit der Green'schen Funktion und nutzen Sie, dass

$$\left.\frac{\partial G(t, t')}{\partial t}\right|_{t=t'} = 1$$

gilt, um die explizite Form von $G(t, t')$ zu bestimmen. *(5 Punkte)*

c) Sei nun $\omega_0 > \gamma$ und $f(t) = f_0 \cos \Omega t$. Bestimmen Sie die explizite Lösung $y(t)$ der Gleichung (10). *(4 Punkte)*

d) Sei nun $\gamma > \omega_0$ und $f(t) = f_0 \cos \Omega t$. Bestimmen Sie die explizite Lösung $y(t)$ der Gleichung (10). *(4 Punkte)*