Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik Ia

WS 2018-2019 **Blatt 1** **17.10.2018**

Aufgabe 1 *Lösen von Gleichungssystemen*

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(1 Punkt)

(b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 &= 1 \\ \frac{3}{2}x_1 - 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(1 Punkt)

(c)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 + 10x_3 &= 12 \\ -5x_1 - 6x_2 - 6x_3 &= 14 \\ 15x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= 49 \end{aligned}$$

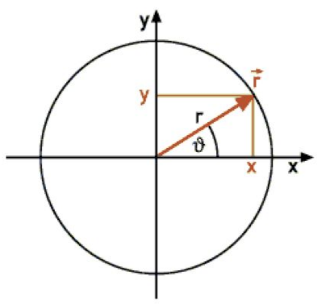
(1 Punkt)

(d)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(1 Punkt)

Aufgabe 2 *Polarkoordinaten*

Bei vielerlei Fragestellungen in den Naturwissenschaften ist es sinnvoll ein geeignetes Koordinatensystem zu wählen, das von den üblichen kartesischen Koordinaten abweicht. Das vermutlich einfachste Beispiel dafür sind die sogenannten "Polarkoordinaten" r, ϑ in zwei Dimensionen. Hierbei bezeichnet $r := \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, \infty)$ den Radius und $\vartheta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in [0, 2\pi)$ den Winkel.



Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung $\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \end{pmatrix}$ der Vektoren. *(1 Punkt)*

b) Zeichnen Sie diese Vektoren in ein Koordinatensystem. *(1 Punkt)*

Aufgabe 3 *Drehungen in der Ebene*

Sei $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ein beliebiger Ortsvektor in der (x, y)-Ebene.

a) Geben Sie seine allgemeine Darstellung in Polarkoordinaten $\{r, \theta\}$ an. *(1 Punkt)*

b) Wie lauten die Polarkoordinaten des Vektors $\vec{r}_2$, der aus $\vec{r}_1$ durch Rotation um den Winkel φ entsteht? Wie lauten die kartesischen Koordinaten x_2, y_2 von $\vec{r}_2$? *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie, dass die kartesischen Koordinaten von $\vec{r}_2$ in die Form

$$x_2 = \cos(\varphi)x_1 - \sin(\varphi)y_1$$

und

$$y_2 = \sin(\varphi)x_1 + \cos(\varphi)y_1$$

gebracht werden können . *(2 Punkte)*

d) Schreiben Sie die obige Beziehung als Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = D(\varphi) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

und geben sie die sogenannte Drehmatrix $D(\varphi)$ explizit an. *(1 Punkt)*

e) Berechnen Sie die Determinante der Drehmatrix. *(1 Punkt)*

f) Zeigen Sie, dass die Inverse der Drehmatrix folgende Relation erfüllt

$$D(\varphi)^{-1} = D(-\varphi).$$

(1 Punkt)

Aufgabe 4 *Vollständige Induktion*

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die folgenden Aussagen:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *(1 Punkt)*

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ *(1 Punkt)*

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{2+n}{2^n}$ *(1 Punkt)*

Aufgabe 5 *Uneigentliche Integrale*

Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale. Konvergieren die Integrale?

(a) $\int\limits_1^\infty \mathrm{d}x \, \exp\left\{-\frac{x}{1+x}\right\} \frac{1}{(1+x)^2}$ *(1 Punkt)*

(b) $\int\limits_0^\infty \mathrm{d}x \, \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ *(1 Punkt)*

(c) $\int\limits_1^\infty \mathrm{d}x \, \frac{x}{e^{x/2}}$ *(1 Punkt)*

(d) $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{\sin x}{x}$ *(1 Punkt)*

(e) $\int\limits_1^\infty \mathrm{d}x \, \frac{\ln x}{x^p}$ für $p > 1$ *(1 Punkt)*

(f) $\int\limits_0^\infty \mathrm{d}x \, \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ *(1 Punkt)*

Aufgabe 6 *Eigenschaften verschiedener Integrale*

a) Was können Sie über die Konvergenz des Integrals $\int\limits_1^\infty \mathrm{d}x \, x^{-p}$ in Abhängigkeit von p sagen?

(1 Punkt)

b) Zeigen Sie durch partielle Integration, dass die Funktion $I(t) = \int\limits_0^\infty dx \, x^t e^{-x}$ für $t > -1$ der Gleichung $I(t) = tI(t-1)$, mit $t > 0$ genügt. Berechnen Sie $I(n)$ explizit für $n \in \{0, 1, 2\}$. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie für zwei in $[a, b]$ stetige Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die Schwarzsche Ungleichung

$$\left(\int\limits_a^b dx \, f(x)g(x)\right)^2 \leq \int\limits_a^b dx \, (f(x))^2 \int\limits_a^b dx \, (g(x))^2. \tag{1}$$

(2 Punkte)

Hinweis: Nutzen Sie als Grundlage der Argumentation eine Ungleichung der Form $p_2(x) \geq 0$, wobei $p_2(x) = ax^2 + bx + c$ ein quadratisches Polynom in x ist. Sie können daraus anhand der Diskriminanten $\Delta = b^2 - 4ac$ Gleichung (1) beweisen.