Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik Ia

WS 2018-2019 **Blatt 2** **24.10.2018**

Aufgabe 7 *Ableitungen*

Verwenden Sie die Definition

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1}$$

zur Bestimmung der Ableitung von

a) $f(x) = \sqrt{x}$ für $x > 0$; (*0.5 Punkte*)
   Hinweis: Benutzen Sie, dass $g(y) = y^2$ die Umkehrfunktion von $f(x)$ ist, $g(y) = f^{-1}(y)$.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$. (*0.5 Punkte*)

Verwenden Sie die Ableitungsregeln zur Bestimmung der Ableitung von

c)
$$f(x) = \frac{\sin x \cdot e^{\sin x}}{2 + \sin x};$$
(*0.5 Punkte*)

d)
$$f(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$
(*0.5 Punkte*)

Aufgabe 8 *Leibniz-Regel*

Benutzen Sie vollständige Induktion zum Beweis der Leibniz-Regel

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(f(x)g(x)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x) \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}} g(x) \tag{2}$$

mit $f, g \in C^n(\mathbb{R})$ und $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. (*2 Punkte*)

Aufgabe 9 *Taylorentwicklungen*

a) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\sin x = p_n(x) + R_n(x) \tag{3}$$

gilt, wobei $R_n(x)$ das Restglied und $p_n(x)$ das Taylorpolynom darstellt. Letzteres ist wie folgt definiert:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \tag{4}$$

Schätzen Sie die Fehler

$$|\sin x - p_5(x)| \quad \text{für } |x| \leq \pi$$

(0.5 Punkte)

und

$$|\sin x - p_7(x)| \quad \text{für } |x| \leq \pi$$

ab. *(0.5 Punkte)*

b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von $f(x) = \ln(1+x)$ um $x_0 = 0$ für $x > -1$. *(1 Punkt)*

Aufgabe 10 *Partielle Integration*

Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels partieller Integration.

a) $I(z) = \int_0^z x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$ *(1 Punkt)*

b) $I(z) = \int_0^z \ln(x)\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ *(1 Punkt)*

c) $I(z) = \int_0^z \sin^2(x)\mathrm{d}x$ *(1 Punkt)*

Aufgabe 11 *Integration durch Substitution*

Berechnen Sie die folgenden Integrale durch Substitution.

a) $I(z) = \int_0^z \frac{\sqrt{1+\ln(x+1)}}{x+1}\mathrm{d}x$ *(1 Punkt)*

b) $I(z) = \int_0^z x^3\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x$ *(1 Punkt)*

c) $I(z) = \int_0^z x^2\sqrt{x^3+1}\mathrm{d}x$ *(1 Punkt)*