# Übung zur Vorlesung
# Theoretische Physik Ia

**WS 2018-2019** **Blatt 4** **7.11.2018**

## Aufgabe 19 *Partielle Ableitungen*

Bilden Sie die partiellen Ableitungen nach $x$, $y$, und ggf. nach $z$ der Funktionen

a) $f(x,y) = x^2\sqrt{1-y^2}$ (*1 Punkt*)

b) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ (*1 Punkt*)

c) $f(x,y,z) = xyz + xy + z$ (*1 Punkt*)

d) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)\cos(x)}$ (*1 Punkt*)

e) $f(x,y) = \sin(x) + \cos(y^x)$ (*1 Punkt*)

f) Berechnen Sie die Steigung der Tangenten in $x-$ und $y-$Richtung im Punkt $P = (0,1)$ für die Fläche, die dadurch festgelegt wird, dass die darauf liegenden Punkte die Relation $z = x^2 + y^2$ erfüllen. (*1 Punkt*)

g) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $f_{xx}$, $f_{xy}$, $f_{yx}$ und $f_{yy}$ der Funktion $f(x,y) = R^2 - x^2 - y^2$. (*1 Punkt*)

**Hinweis** Als Kurzschreibweise für die partiellen Ableitungssymbole $\frac{\partial f}{\partial x}$ und analog für höhere Ableitungen verwenden wir folgende Notation:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} \quad \forall f, x, y.$$

## Aufgabe 20 *Höenlinien und totales Differential*

Bestimmen Sie die Linien gleicher Höhe, die den Abstand 0.5 von der $x-y-$Ebene haben, für die Flächen, die dadurch definiert sind, dass die darauf liegenden Punkte die folgenden Relationen erfüllen. Geben Sie dazu eine Relation zwischen $x$ und $y$ an, welche diese Linie beschreibt.

a) $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$ (*1 Punkt*)

b) $z = -x - 2y + 2$ (*1 Punkt*)

Berechnen Sie das totale Differential der Funktionen

c) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ (*1 Punkt*)

d) $f(x,y) = x^2 + y^2$ (*1 Punkt*)

e) $f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{-1}$ *(1 Punkt)*

## Aufgabe 21 *Taylorentwicklung in mehr Variablen*

Die Taylorentwicklung um den Punkt $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_d)$ herum einer Funktion $f(\boldsymbol{x})$ von $d$ Variablen $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ ist für ein allgemeines $d$ durch folgende Formel gegeben

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} \frac{(x_1-a_1)^{n_1}\cdots(x_d-a_d)^{n_d}}{n_1!\cdots n_d!} \left(\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_d} f}{\partial x_1^{n_1}\cdots \partial x_d^{n_d}}\right)\Bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}} = \\ &= f(\boldsymbol{a}) + \sum_{j=1}^{d}(x_j-a_j)\frac{\partial f}{\partial x_j}\Bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}(x_j-a_j)(x_k-a_k)\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\Bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}} + \ldots \end{aligned}$$

Für den Fall $d = 2$ vereinfacht sich die Taylorentwicklung von $f(x,y)$ um den Punkte $(x_0, y_0)$ herum gemäßobenstehender Formel zu

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x_0,y_0) &+ (x-x_0)f_x(x_0,y_0) + (y-y_0)f_y(x_0,y_0) + \\ &+ \frac{1}{2}\Big[(x-x_0)^2 f_{xx}(x_0,y_0) + (x-x_0)(y-y_0)\Big(f_{xy}(x_0,y_0) + f_{yx}(x_0,y_0)\Big) + \\ &+ (y-y_0)^2 f_{yy}(x_0,y_0)\Big] + \frac{1}{6}\Big[(x-x_0)^3 f_{xxx}(x_0,y_0) + \\ &+ (x-x_0)^2(y-y_0)\Big(f_{xxy}(x_0,y_0) + f_{xyx}(x_0,y_0) + f_{yxx}(x_0,y_0)\Big) + \\ &+ (x-x_0)(y-y_0)^2\Big(f_{yyx}(x_0,y_0) + f_{yxy}(x_0,y_0) + f_{xxy}(x_0,y_0)\Big) + \\ &+ (y-y_0)^3 f_{yyy}(x_0,y_0)\Big] + \ldots \end{aligned}$$

wobei wir wie in Aufgabe 19 Kurzschreibweisen verwenden: $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$, $\forall f, x, y$.
Berechnen Sie die Talorentwicklung um den Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ herum bis zur dritten Ordnung für die Funktion

$$f(x,y) = e^{-x\cos y} + x(y-2)^2$$

*(3 Punkte)*

## Aufgabe 22 *Niveauflächen*

Wie wir in Aufgabe 20 im Falle einer Funktion $z(x,y)$ von zwei Variablen Linien konstanter Höhe (also konstanten Funktionswertes) bestimmen konnten, so können wir analog im Falle einer Funktion $\phi(x,y,z)$ von drei Variablen Niveaufläschen betrachten, also Fläschen, auf denen der Funktionswert konstant ist.

Geben Sie die Niveauflachen der folgenden Funktionen $\phi(x,y,z)$ durch eine Formel an und beschreiben Sie deren geometrische Form.

a) $\phi(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$ *(1 Punkt)*

b) $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2$ *(1 Punkt)*

c) $\phi(x, y, z) = x + y - 3z$ *(1 Punkt)*

**Aufgabe 23** *Integrale*

Lösen Sie die folgenden Integrale:

a)

$$\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x$$

(*1 Punkt*)

b)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} \mathrm{d}x$$

(*1 Punkt*)

c)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} \mathrm{d}x$$

(*1 Punkt*)