Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik Ia

WS 2018-2019 **Blatt 5** **24.11.2018**

Aufgabe 23 *Integration von Funktionen in mehreren Variablen*

Lösen Sie die folgenden Integrale:

a)
$$\int_\Omega xyz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z; \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x,y,z \le 1\}$$

(*0.5 Punkte*)

b)
$$\int_\Omega e^{x+y} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y; \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x,\ x+y-2 \le 0\}$$

(*0.5 Punkte*)

c)
$$\int_\Omega z e^{2x+y} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z; \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le y \le x,\ x+y-3 \le 0,\ 0 \le z \le y\}$$

(*1 Punkt*)

d)
$$\int_\Omega (1+2z) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z; \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+4z^2 \le 4,\ z \ge 0\}$$

(*1 Punkt*)

e)
$$\int_\Omega (x+z) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z; \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z \ge 0,\ x+y+z \le 1\}$$

(*1 Punkt*)

f)
$$\int_\Omega e^y \sqrt{x^2-z^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z; \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^3\}$$

(*2 Punkte*)

Aufgabe 24 *Taylorentwicklung in mehreren Variablen*

Bestimmen Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ für die folgenden Funktionen:

a)

$$f(x, y, z) = \cos(xe^y)\sqrt{1 - z^2}$$

(*2 Punkte*)

b)

$$f(x, y, z) = \frac{\arccos[x(y - \sin z)]}{\sqrt{1 + y^2 + z^2}}$$

(*5 Punkte*)

Aufgabe 25 *Komplexe Zahlen*

Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ kann durch Angabe zweier reeller Zahlen dargestellt werden. Dabei verwenden wir die Darstellung durch *Realteil* $\operatorname{Re} z = x$ und *Imaginärteil* $\operatorname{Im} z = y$

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = x + iy \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathbb{R},$$

oder die Polardarstellung mit *Betrag* $|z|$ und *Argument* $\arg z$

$$z = |z| \exp\{i \arg z\} \quad \text{mit} \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \arg z = \arctan \frac{y}{x}.$$

Um die Polardarstellung auch geometrisch zu interpretieren ist es hilfreich die Eulersche Formel

$$e^{i\varphi} = \exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

zu verwenden.

a) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$ und $z_2 = \sqrt{6} - 3\sqrt{2}i$.

(i) Geben Sie Real- und Imaginärteile an.

(ii) Stellen Sie die Zahlen in der komplexen Ebene dar.

(iii) Bestimmen Sie die Beträge und Argumente der komplexen Zahlen, und geben Sie ihre Polardarstellung an.

(iv) Wie lautet die Summe bzw. das Produkt von z_1 und z_2?

(v) Bestimmen Sie den Real-/Imaginärteil von $\frac{z_1}{z_2}$.

(*2 Punkte*)

b) Bestimmen Sie die Real- und Imaginärteile von $z_3 = 2\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$ und $z_4 = \sqrt{3}\exp\left(i\frac{3\pi}{4}\right)$

(*1 Punkt*)

c) Finden Sie alle komplexen Zahlen die $z^5 = -1$ erfüllen. Verwenden sie dafür die Polardarstellung von z.
(*2 Punkte*)

d) Wir definieren für eine komplexe Zahl $z = x + iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$, die zugehörige komplex konjugierte Zahl $z^* = x - iy$.

Zeigen Sie für $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, 2)$

(i) $(z_1^*)^* = z_1$

(ii) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

(iii) $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$

(iv) $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$

(v) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(*2 Punkte*)