Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik Ia

WS 2018-2019 **Blatt 6** **22.11.2018**

Aufgabe 27 *Mehrdimensionale Integration*

Bestimmen Sie die folgenden mehrdimensionalen Integrale.

a)

$$\int_{x=0}^{2} \int_{y=x-1}^{3x} x^2 \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

(*1 Punkt*)

b)

$$\int_{\Omega} xy \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y; \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; \ln x \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

(*1 Punkt*)

c)

$$\int_{\Omega} xy \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z; \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x, y^2 \leq z \leq 4y\}$$

(*1 Punkt*)

d)

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{2x} \int_{z=x^2}^{x+y} \frac{y}{z} \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

(*1 Punkt*)

e)

$$\int_{\Omega} \mathrm{d}x \mathrm{d}y; \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq 1\}, \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}, \ a, b > 0.$$

(*1 Punkt*)

Aufgabe 28 *Gammafunktion*

Die Gammafunktion $\Gamma(n)$ ist definiert durch

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} \, \mathrm{d}x; \quad n \in \mathbb{R}, \ n > 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ gilt. (*1 Punkt*)

b) Zeigen Sie, dass $\Gamma(n+1) = n!$ gilt. (*1 Punkt*)

c) Berechnen Sie 0!. (*1 Punkt*)

Aufgabe 29 *Vektorprodukt*

Seien $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^3$: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$. Das Vektorprodukt $\boldsymbol{p}$ der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist gegeben durch

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \quad p_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k,$$

wobei v_i die i-te Komponente des Vektors $\boldsymbol{v}$ bezeichnet. Das Levi-Civita-Symbol in drei Dimensionen ist definiert durch

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{wenn } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \\ -1 & \text{wenn } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen unter Verwendung des Levi-Civita-Symbols.

a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ (*1 Punkt*)

b) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle \, \boldsymbol{b} - \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle \, \boldsymbol{a}$, wobei $\langle , \rangle$ das Skalarprodukt bezeichnet. (*2 Punkte*)

c) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ (*1 Punkt*)

d) Seien $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$. Wann gilt $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$? (*2 Punkte*)

e) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \rangle = 0$, wobei $\langle , \rangle$ das Skalarprodukt bezeichnet. (*1 Punkt*)

f) $\boldsymbol{e}_x \times (\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z) = 0$, wobei $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ und $\boldsymbol{e}_z$ die kartesischen Einheitsvektoren des Raumes $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sind. (*1 Punkt*)

Aufgabe 30 *Zylindrische Knobelei*

Betrachten Sie einen Zylinder in $\mathbb{R}^3$ mit der Achse

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

und Radius $R = 1$. Zeigen Sie, dass der Punkt $P = (2, 1, 2)$ auf diesem Zylinder liegt.
(*2 Punkte*)