Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik Ia

WS 2018-2019 **Blatt 8** **06.12.2018**

Aufgabe 35 *Matrizenprodukt*

Betrachten Sie die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ (das heißt, A ist eine Matrix mit n Zeilen und m Spalten und jeder Eintrag ist eine reelle Zahl) und $B \in \mathbb{R}^{m\times l}$. Die Produktmatrix von A und B, $C = AB \in \mathbb{R}^{n\times l}$, definieren wir, indem wir den Eintrag der Produktmatrix C in der i-ten Zeile und j-ten Spalte durch folgende Formel festlegen:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj}$$

wobei A_{ik} der Eintrag von A in Zeile i und Spalte j ist, etc... Beachten Sie, dass sich das Produkt einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit einem Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ darstellen lässt als das Produkt der Matrix A mit einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ (B hat m Zeilen, also so viel, wie der Vektor v Zeilen hat, und besteht nur aus einer Spalte!), wobei B dann folgendermaßen definiert ist: $B_{i1} = x_i$, wobei x_i die Einträge von $\boldsymbol{x}$ sind (also, B und $\boldsymbol{x}$ haben genau dieselben Einträge, sehen aufgeschrieben identisch aus). Berechnen Sie das Matrizenprodukt $C = AB$ für folgende Matrizen.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(*1 Punkt*)

b)

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -3 \\ -\frac{1}{2} & \sqrt{3} & 2 \\ 0 & -2 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(*1 Punkt*)

c)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(*1 Punkt*)

d)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(*1 Punkt*)

e) Gegeben drei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times l}$ und $C \in \mathbb{R}^{l\times s}$, wie viele Zeilen und Spalten hat die Produktmatrix $D = ABC$? Ist das Matrixprodukt assoziativ, d.h. gilt $(AB)C = A(BC)$? Beweisen Sie ihre Antwort. *(2 Punkte)*

Aufgabe 36 *Komplex Konjugierte und Transponierte einer Matrix*

Gegeben eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, so definieren wir die zugehörige komplex konjugierte Matrix $A^* \in \mathbb{C}^{n\times m}$ unter Rückgriff auf deren Einträge durch $(A^*)_{ij} = (A_{ij})^*$, das heißt, jedes Element der Matrix A^* ist das komplex konjugierte Element von A, das in der gleichen Zeile und Spalte steht. Die Transponierte einer Matrix A, geschrieben als $A^T \in \mathbb{C}^{m\times n}$, definieren wir über deren Einträge durch $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ (wir vertauschen Zeile und Spalte von A, bzw. spiegeln an der Hauptdiagonalen). Summe und Produkt komplexer Matrizen definieren wir genau wie im Fall reeller Matrizen.

a) Zeigen Sie, dass wenn $A^* = A$, dann $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. *(0.5 Punkte)*

b) Geben Sie die Transponierte A^T folgender Matrizen an

1.
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(0.5 Punkte)

2.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
(0.5 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass $(A^T)^T = A$ für jede Matrix A. *(0.5 Punkte)*

d) Zeigen Sie, dass $(AB)^T = B^T A^T$ für beliebige Matrizen A und B (sofern deren Zeilen- und Spaltenanzahl derart zusammenpassen, dass man sie überhaupt multiplizieren kann). *(1 Punkt)*

Aufgabe 37 *Symmetrische und antisymmetrische Matrizen + Spur*

Eine quadratische (d.h., genau so viele Zeilen wie Spalten) Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ bezeichnen wir als symmetrisch, falls $A = A^T$. Wir nennen sie antisymmetrisch, falls $A = -A^T$. Die Spur der Matrix A definieren wir als $\mathrm{Tr}\{A\} = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$, das heißt, sie ist die Summe der Diagonalelemente von A.

a) Zeigen Sie dass für eine beliebige quadratische Matrix A die Matrix $M = A + A^T$ symmetrisch ist. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass für eine beliebige quadratische Matrix A die Matrix $N = A - A^T$ antisymmetrisch ist. *(1 Punkt)*

Aus den Aufgabenteilen a) und b) ist einfach ersichtlich, dass eine beliebige quadratische Matrix A als Summe einer symmetrischen und antisymmetrischen Matrix geschrieben werden kann, $A = M + N$, wobei definiert ist $M = (A + A^T)/2$, und $N = (A - A^T)/2$. Berechnen Sie die Spur folgender Matrizen und zerlegen Sie sie in eine Summe symmetrischer und antisymmetrischer Matrizen.

c)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d)
$$B = \begin{pmatrix} 13 & -1 & -9 \\ -22 & 51 & 4 \\ -44 & 7 & -10 \end{pmatrix}$$

e)
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & -8 \\ 13 & -21 & 34 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 38 *Drehungen*

In $\mathbb{R}^3$ lässt sich die Drehung eines Vektors um eine der Achsen darstellen durch die Multiplikation des Vektors mit der entsprechenden Matrix:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$
$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix},$$
$$R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zum Beispiel ist der Vektor $\boldsymbol{y} = R_x(\theta)\boldsymbol{x}$ gleich dem im Uhrzeigersinn um einen Winkel θ um die x-Achse gedrehten Vektor $\boldsymbol{x}$. Gegeben den Vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie $\boldsymbol{y} = R_x(\frac{\pi}{2})\boldsymbol{x}$. *(0.5 Punkte)*

b) Berechnen Sie $\boldsymbol{y} = R_y(\frac{\pi}{4})\boldsymbol{x}$. *(0.5 Punkte)*

c) Berechnen Sie $\boldsymbol{y} = R_z(\pi)\boldsymbol{x}$. *(0.5 Punkte)*

d) Berechnen Sie $\boldsymbol{y} = R_z(\pi)R_x(\frac{\pi}{2})\boldsymbol{x}$. *(0.5 Punkte)*

e) Berechnen Sie $\boldsymbol{y} = R_x(\frac{\pi}{2})R_z(\pi)\boldsymbol{x}$. Kommt das Gleiche heraus wie in Aufgabenteil d)? Diskutieren Sie, wieso. *(1 Punkt)*

f) Stellen Sie die Matrix auf, die die folgende Abbildung beschreibt: Wir drehen um die x-Achse um einen Winkel θ und danach um die z-Achse um einen Winkel ψ. Stellen Sie die Matrix auf, die folgende Abbildung beschreibt: Wir drehen um die z-Achse um einen Winkel ψ und danach um die x-Achse um einen Winkel θ. Sind beide Matrizen gleich? Diskutieren Sie das Ergebnis. *(3 Punkte)*