Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2019/2020 **Blatt 10** **09.01.2020**

Aufgabe 23

Seien $\vec{A}$ und Φ gegeben, so dass

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \neq 0 \ ,$$

d.h. $\vec{A}$ und Φ erfüllen nicht die Lorenz-Bedingung.

a) Finden Sie die Gleichung, die die Eichung Λ_1 erfüllen soll, wobei

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda_1$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\Lambda_1$$

mit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi'}{\partial \tau} = 0$$

gilt.

(1 *Punkt*)

b) Finden Sie die Eichtransformation Λ_L, so dass

$$\vec{A}'' = \vec{A}' + \vec{\nabla}\Lambda_L$$

und

$$\Phi'' = \Phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\Lambda_L \ ,$$

wobei $\vec{A}''$,Φ'' und $\vec{A}'$,Φ' die Lorenz-Bedingung erfüllen.

(1 *Punkt*)

Aufgabe 24 *Retardierung in der Coulomb-Eichung*

Im Gegensatz zur Lorenz-Eichung div$\vec{A} + \dot{\Phi}/c = 0$ reagiert in der Coulomb-Eichung div$\vec{A} = 0$ das skalare Potential *instantan* auf Änderungen der Ladungsverteilung – im (scheinbaren) Widerspruch zur speziellen Relativitätstheorie. Dieses Paradoxon soll genauer untersucht werden.

a) Leiten Sie aus den Maxwellgleichungen die Bewegungsgleichungen für das skalare Potential $\Phi(\vec{x},t)$ und das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{x},t)$ ab. Erklären Sie, warum man eine Eichfreiheit hat.

(1.5 *Punkte*)

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für $\Phi(\vec{x},t)$ und $\vec{A}(\vec{x},t)$ in beiden Eichungen. Bestimmen Sie die Lösung für $\Phi_C(\vec{x},t)$ in der Coulomb-Eichung, und zeigen Sie damit, dass das skalare Potential instantan von der Ladungsdichte abhängt. (Führen Sie die transversale Stromdichte ein, um die Gleichung für $\vec{A}_C(\vec{x},t)$ kompakt anschreiben zu können)

(3 *Punkte*)

c) Überprüfen Sie, dass $\Phi_L(\vec{x},t)$ und $\vec{A}_L(\vec{x},t)$ in Lorenz-Eichung die Bewegungsgleichung erfüllen,

$$\vec{A}_L(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\int d^3x' \, \frac{\vec{j}\,(\vec{x}',t' = t - |\vec{x}-\vec{x}'|/c)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$\Phi_L(\vec{x},t) = \int d^3x' \, \frac{\rho\,(\vec{x}',t' = t - |\vec{x}-\vec{x}'|/c)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}.$$

(1 *Punkt*)

d) Das Vektorpotential über die Eichfunktion $\chi(\vec{x},t)$, die Coulomb- mit Lorenz-Eichung verknüpft, bestimmt werden. Zeigen Sie, dass

$$\chi(\vec{x},t) = -\int d^3x' \frac{c}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \int_0^{|\vec{x}-\vec{x}'|/c} d\tau \rho(\vec{x}',t-\tau) + \chi_0$$

mit einer Konstanten χ_0 gilt.

Anleitung: Zeigen Sie zunächst, dass die Zeitableitung von χ von der Differenz $\Phi_L - \Phi_C$ abhängt. Lösen Sie dann diese Differentialgleichung.

(2 *Punkte*)

e) Berechnen Sie schließlich das Feld $\vec{E}(\vec{x},t)$ mit Hilfe der Potentiale in Coulomb-Eichung.Wie klären Sie den eingangs aufgeführten Widerspruch?

$$\vec{A}_C(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\int d^3x' \left(\frac{\vec{j}(\vec{x}',t') - c\vec{e}_R\rho(\vec{x}',t')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + c^2 \frac{\vec{e}_R}{|\vec{x}-\vec{x}'|^2} \int_0^{|\vec{x}-\vec{x}'|/c} d\tau \rho(\vec{x}',t-\tau) \right),$$

$$\vec{e}_R = (\vec{x}-\vec{x}')/|\vec{x}-\vec{x}'| \qquad t' = t - |\vec{x}-\vec{x}'|/c.$$

Hinweis: Schreiben Sie die auftretende Ableitung nach t unter dem τ-Integral in eine Ableitung nach τ um. Führen Sie dann die Integration aus.

(3 *Punkte*)