

# Seminar zur Vorlesung Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2019/2020

Blatt 11

17.01.2020

## Aufgabe 25 *Antenne*

Eine dünne lineare Antenne der Länge  $d$  wird so angeregt, dass ein sinusförmiger Strom durch sie fließt. Dabei sei die Wellenlänge der Oszillation exakt so groß wie die Antenne. ( $k = 2\pi/d$ )

a) Zeigen Sie, dass im Fernfeld das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\hat{z}i \frac{2I}{c} \frac{e^{ikr}}{kr} \frac{\sin(\pi \cos(\theta))}{\sin^2(\theta)}$$

ist. **Hinweis:** Zeigen / Benutzen Sie zunächst, dass

$$\vec{A}(\vec{x}) \approx \frac{e^{ikr}}{cr} \int \vec{j}(\vec{x}') e^{-ik\hat{x}\cdot\vec{x}'} d^3x'$$

für  $kr \gg 1$  und  $r = |\vec{x}|$ .

(2 Punkte)

b) Berechnen Sie die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel. Skizzieren oder plotten Sie Ihre Lösung.

(2 Punkte)

## Aufgabe 26 *Dipolstrahlung*

In der Vorlesung wurde das Vektorpotential

$$\vec{A}(\omega_n, \vec{x}) = \vec{A}_n(\vec{x}) = \frac{e^{ik_n r}}{cr} \int \vec{j}_n(\vec{x}') d^3x'$$

der elektrischen Dipolstrahlung abgeleitet ( $r = |\vec{x}|$ ). Hierbei ist  $\vec{j}_n(\vec{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{j}(\vec{x}, t) e^{i\omega_n t} dt$  der Fourierkoeffizient einer mit der Periode  $T$  oszillierenden Stromverteilung

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{j}_n(\vec{x}) e^{-i\omega_n t} = \vec{j}_0(\vec{x}) + 2\text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{j}_n(\vec{x}) e^{-i\omega_n t}$$

wobei  $\omega_n = ck_n = 2\pi n/T$  und alle anderen mit  $n$  indizierten Größen analog definiert sind.

- a) Wiederholen Sie die Schritte aus der Vorlesung und bringen Sie das Vektorpotential auf die Form

$$\vec{A}_n(\vec{x}) = -ik_n \vec{p}_n \frac{e^{ik_n r}}{r}$$

indem Sie die Stromdichte  $\vec{j}_n$  mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung durch die Ladungsdichte  $\rho_n$  ausdrücken. Die Größe  $\vec{p}_n$  ist das Dipolmoment der Ladungsverteilung.

(1 Punkt)

- b) Zeigen Sie, dass  $\vec{B}_n = \text{rot} \vec{A}_n$  den Ausdruck

$$\vec{B}_n = k_n^2 (\vec{e}_r \times \vec{p}_n) \frac{e^{ik_n r}}{r} \left( 1 - \frac{1}{ik_n r} \right)$$

ergibt.

(2 Punkte)

- c) Beweisen Sie, dass das elektrische Feld im quellfreien Bereich über  $\vec{E}_n = \frac{i}{k_n} \text{rot} \text{rot} \vec{A}_n$  mit dem Vektorpotential zusammenhängt. Berechnen Sie  $\vec{E}_n$  und bringen Sie es auf die Form

$$\vec{E}_n = k_n^2 [(\vec{e}_r \times \vec{p}_n) \times \vec{e}_r] \frac{e^{ik_n r}}{r} + [3\vec{e}_r (\vec{e}_r \vec{p}_n) - \vec{p}_n] \left( \frac{1}{r^2} - \frac{ik_n}{r} \right) \frac{e^{ik_n r}}{r}$$

**Hinweis:** Wenn Sie die doppelte Rotation mit dem  $\epsilon$ -Tensor berechnen, zeigen Sie zunächst, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{e^{ikr}}{r} = -k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \frac{x_l x_m}{r} + \left[ \delta_{lm} - 3 \frac{x_l x_m}{r} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r}$$

(3 Punkte)

- d) Diskutieren Sie die Eigenschaften des  $\vec{E}_n$ - und  $\vec{B}_n$ -Feldes im Nahfeld und im Fernfeld. Skizzieren oder plotten Sie die Felder.

(2 Punkte)

- e) Berechnen Sie die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel. Zeigen Sie, dass die totale abgestrahlte Leistung

$$P_n = \frac{ck^4}{3} |\vec{p}_n|^2$$

ist.

(2 Punkte)