Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2019/2020 **Blatt 13** **31.01.2020**

Aufgabe 28 *Lorentztransformation einer ebenen Welle*

Unter der Lorentzeichung $\partial_\alpha A^\alpha$ erfüllt das Vierervektorpotential $A^\alpha(x) = \Big(\Phi(\vec{x},t), \vec{A}(\vec{x},t)\Big)$ die Wellengleichung $\partial_\beta \partial^\beta A^\alpha = 0$ im Vakuum. Eine Lösung sind die ebenen Wellen im Vakuum

$$A^\alpha(x) = \mathrm{Re}\left\{a^\alpha \exp[-ik_\beta x^\beta]\right\}$$

, mit $k^\alpha = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$, beschrieben im Inertialsystem S.

a) Verwenden Sie

1. die Invarianz des Wegelementes $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ (woher kommt diese Relation?),
2. die Lorentztransformation kontravarianter Vektoren $x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta$ (warum ist der Zusammenhang linear?),

um explizit zu zeigen, dass die Phase $\phi = -k_\beta x^\beta$ der ebenen Welle in jedem Inertialsystem die gleiche Größe hat, d.h. ein Lorentzskalar ist. Warum erwartet man das?

Anleitung: Überlegen Sie sich zuerst, mit welcher Matrix sich kovariante Vektoren transformieren. Zeigen Sie dann, dass diese Matrix die Inverse von Λ^α_β ist.

(3 *Punkte*)

b) Berechnen Sie die Frequenz ω' in einem Inertialsystem S', dass sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ exentlang der x-Richtung gegenüber S bewegt. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis für verschiedene Winkel θ, die der Wellenvektor $\vec{k}$ mit $\vec{v}$ einschließt. Vergleichen Sie das Ergebnis für kleine Geschwindigkeiten (Taylorentwicklung) mit dem Dopplereffekt der Galileitransformation.

(3 *Punkte*)

c) Berechnen Sie den Wellenvektor $\vec{k}'$ im Inertialsystem S', und zeigen Sie, dass

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)}$$

gilt, wobei θ' der Winkel zwischen $\vec{k}'$ und $\vec{v}$ ist, und die Abkürzungen $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ und $\beta = v/c$ verwendet wurden. Was bedeutet dieses Ergebnis? Was ergibt sich hier für kleine Geschwindigkeiten?

(2 *Punkte*)

d) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe b) und c), indem Sie durch explizites Einsetzen die Invarianz von $k_\alpha k^\alpha$ nachrechnen. Was bedeutet diese Invarianz?

(2 *Punkte*)

Aufgabe 29 *Gleichförmig bewegter elektrischer Monopol*

Im Ruhesystem (IS) eines Monopol ist das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{e}_r \frac{q}{r^2}$$

a) Berechnen Sie die elektromagnetischen Felder in einem Inertialsystem IS′, das sich bezüglich IS mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ bewegt.

Hinweis: Verwenden Sie explizit die Transformationsmatrix für einen Lorentz-Boost in x-Richtung, um den Feldstärketensor oder die elektromagnetischen Potentiale zu transformieren.

(2 *Punkte*)

b) Drücken Sie die Felder in den Koordinaten $\vec{x}'$ und $\vec{t}' = 0$ des IS′ aus.

(2 *Punkte*)

Aufgabe 30 *Gleichförmig bewegter elektrischer Dipol*

Im Ruhesystem (IS) eines Dipol $\vec{p}$ ist das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \frac{3\vec{e}_r(\vec{p}\cdot\vec{e}_r) - \vec{p}}{r^3}$$

a) Berechnen Sie die elektromagnetischen Felder in einem Inertialsystem IS′, das sich bezüglich IS mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ bewegt.

Hinweis: Verwenden Sie explizit die Transformationsmatrix für einen Lorentz-Boost in x-Richtung, um den Feldstärketensor oder die elektromagnetischen Potentiale zu transformieren.

(3 *Punkte*)

b) Drücken Sie die Felder in den Koordinaten $\vec{x}'$ und $\vec{t}' = 0$ des IS′ aus.

(2 *Punkte*)

c) Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus Teil b) und betrachten Sie die Fälle $\vec{p} = p\vec{e}_z$ und $\vec{p} = p\vec{e}_x$. Wie unterscheiden sich die Felder in IS und IS′? Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.

(2 *Punkte*)