Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2019/2020 **Blatt 4** **7.11.2019**

Aufgabe 8 *Gaußsches Gesetz*

Es sei $\rho(\vec{r}) = \sum_j q_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j)$ eine Ladungsverteilung. Des Weiteren sei V ein Volumen in $\mathbb{R}^3$, für welches $\vec{r}_j \in V$ für alle j gilt.

a) Zeigen Sie, dass

$$\oint_{S(V)} \vec{E}\, d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_j q_j$$

gilt, wobei $S(V)$ die Oberfläche ist, die das Volumen V einschließt.

(1 *Punkt*)

b) Sei nun V_1 ein Volumen für das $\vec{r}_j \notin V_1$ für alle j gilt. Zeigen Sie

$$\oint_{S(V_1)} \vec{E}\, d\vec{a} = 0,$$

wobei $S(V_1)$, die das Volumen V_1 einschließende Oberfläche ist.

(1 *Punkt*)

Aufgabe 9 *Elektrostatik mit endlicher Photonenmasse*

Überlegen Sie, wie sich die Gesetze der Elektrostatik ändern würden, wenn neue Messungen eine korrigierte Form der Coulombkraft

$$\vec{F} = q_1 q_2 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \left(1 + \frac{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}{\Lambda}\right) \exp\left[-\frac{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}{\Lambda}\right] \tag{1}$$

ergäben. Hierbei wäre Λ eine neue Naturkonstante. Für $\Lambda \to \infty$ geht das neue Kraftgesetz in die bekannte Colulombkraft über. Das Superpositionsprinzip soll unverändert gelten.

a) Berechnen Sie das elektrische Feld einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ wenn Gl. (1) als Kraftgesetz gültig wäre.

(2 *Punkte*)

b) Zeigen Sie, dass für dieses elektrische Feld ein skalares Potential existiert (rotationsfrei?). Bestimmen Sie das Potential $\Phi(\vec{x})$ einer Punktladung (das sog. Yukawa-Potential).

(2 *Punkte*)

c) Begründen Sie das Analogon zum Gaußschen Gesetz,

$$\oint_{\partial V} \vec{E}(\vec{x}) \cdot d^2\vec{x} + \frac{1}{\Lambda^2} \int_V \Phi(\vec{x}) d^3x = 4\pi Q_{\mathrm{in}}$$

der "neuen" Elektrostatik, wobei Q_{in} die im Volumen eingeschlossene Ladung ist.

Anleitung: Berechnen Sie zunächst die beiden Integrale für ein Kugelvolumen, in dessen Zentrum sich eine Punktladung befindet. Betrachten Sie dann die Änderung beider Integrale, wenn das kugelförmige Volumen eine Ausstülpung hat,die durch eine Vergrößerungdes Kugelradius über einem kleinen Raumwinkel $d\Omega$ entsteht. Argumentieren Sie dann,warum das Gesetz für ein beliebiges Volumen und beliebige Ladungsverteilungen gilt

(2 *Punkte*)

d) Berechnen Sie die modifizierte Form der Poissongleichnung.

(2 *Punkte*)

Aufgabe 10 *Residuensatz*

Der Residuensatz kann ein sehr nützliches Hilfsmittel für die analytische Berechnung von uneigentlichen Integralen sein.

a) Berechnen Sie das folgenden Integral mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx \tag{2}$$

Hierbei ist $t > 0$ eine beliebige reelle positive Zahl.

Hinweis: Berechnen Sie zuerst die Polstellen der Funktion und wenden Sie danach die bekannten Formeln für die Berechnung der Residuen an.

(1 *Punkt*)

b) Verwenden Sie nun Gl. (2) um

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(tx)}{1+x^2} dx$$

zu berechnen.

(1 *Punkt*)

c) Berechnen Sie ebenso

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx.$$

(1 *Punkt*)