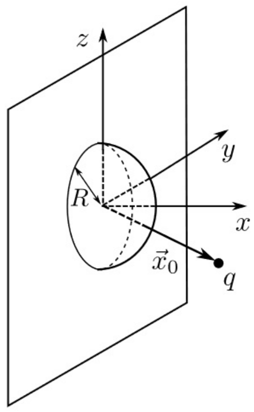
Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2019/2020 **Blatt 5** **14.11.2019**

Aufgabe 11 *Punktladung vor einem Leiter*



Eine Punktladung q am Ort $\vec{x}_0$ befindet sich vor einem unendlich ausgedehnten, geerdeten Leiter mit einer halbkugelförmigen Ausbeulung mit Radius R um den Ursprung, siehe Abbildung.

a) Berechnen Sie das elektrische Potential $\Phi(\vec{x})$, indem Sie passende Spiegelladungen im "verbotenen"Bereich innerhalb des Leiters anbringen, so dass $\Phi(\vec{x})$ Lösung der Poissongleichung im Außenraum ist und die Randbedingungen an der Leiteroberfläche erfüllt.

(1 *Punkt*)

b) Berechnen Sie die Influenzladungsdichte an der Leiteroberfläche, wenn die Ladung sich im Abstand d vom Ursprung auf der x-Achse befindet.

(1 *Punkt*)

c) Bestimmen Sie aus der Lösung von Teilaufgabe a) die Greensche Funktion $G_{\mathrm{D}}(\vec{x},\vec{x}')$ für die gegebenen Randbedingungen. Berechnen Sie damit das Potential bei beliebiger Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ m Außenraum. Zeigen Sie, dass diese formale Lösung die Poissongleichung mit den gegebenen Randbedingungen erfüllt.

(1 *Punkt*)

Aufgabe 12 *Elektrisches Feld einer geladenen Platte*

Gegeben ist eine dünne, homogen geladene, quadratische Platte mit Seitenlänge a und Gesamtladung Q.

a) Geben Sie die Ladungsdichte mit Hilfe der Delta-Funktion und der Heaviside-Funktion an.

(1 *Punkt*)

b) Berechnen Sie das elektrische Potential in der Höhe z über dem Mittelpunkt der Platte. Welche Arbeit wird geleistet, wenn eine Ladung q von außerhalb ($z = \infty$) nach $z = a/2$ transportiert wird?

Hinweis:

$$\int \frac{1}{\sqrt{A^2 + x^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{A^2 + x^2}\right)$$

$$\int_{-A}^{A} \ln \frac{\sqrt{x^2+1} + A}{\sqrt{x^2+1} - A} dx = 8A \sinh^{-1} A - 4\sqrt{1 - A^2} \tan^{-1} \frac{A^2}{\sqrt{1 - A^4}}$$

(2 *Punkte*)

c) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld in der Höhe z über dem Mittelpunkt der Platte in der Form

$$\vec{E}(z) = 4\vec{e}_z \frac{Q}{a^2} \tan^{-1} \frac{a^2/4}{z\sqrt{z^2 + a^2/2}}$$

geschrieben werden kann.

(2 *Punkte*)

d) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(z)$ für $a \to \infty$, falls die Flächenladungsdichte σ konstant gehalten wird. Berechnen Sie außerdem $\vec{E}(z)$ für $a \ll z$. Wie interpretieren Sie die Ergebnisse?

(1 *Punkt*)

Aufgabe 13 *Symmetrie der Greenschen Funktion*

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Greenschen Funktion:

a) Die Greensche Funktion, die Dirichletrandbedingungen erfüllt, ist symmetrisch in ihren Argumenten, d.h.

$$G_{\mathrm{D}}(\vec{x},\vec{x}') = G_{\mathrm{D}}(\vec{x}',\vec{x})$$

(1 *Punkt*)

b) Die von-Neumann Greensche Funktion kann symmetrisiert werden durch

$$G_{\mathrm{N}}^{\mathrm{sym}}(\vec{x},\vec{x}') = G_{\mathrm{N}}(\vec{x},\vec{x}') - \frac{1}{S}\oint_S G_{\mathrm{N}}(\vec{x},\vec{y})d^2y$$

wobei S die Randfläche ist, auf der die von-Neumann Bedingung gegeben ist.

(2 *Punkte*)

Hinweis: Verwenden Sie den Greenschen Satz.