

Seminar zur Vorlesung Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2019/2020

Blatt 1

16.10.2019

Aufgabe 1 *Orthogonale krummlinige Koordinaten*

Ein Punkt $\vec{r} = (x, y, z)$ mit den kartesischen Koordinaten x , y und z kann ebenso durch die krummlinigen Koordinaten q_1 , q_2 und q_3 beschrieben werden. Die zugehörigen Einheitsvektoren sind

$$\vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \quad \text{mit} \quad h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| \quad (i = 1, 2, 3).$$

Erfüllen die Einheitsvektoren die Beziehung $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ spricht man von orthogonalen Koordinaten. Wir legen die Reihenfolge der \vec{e}_i so fest, dass sie ein Rechtssystem bilden, d.h. $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}_k$, wobei (ijk) zykl. $(1, 2, 3)$.

a) Zeigen Sie, dass der Gradient einer skalaren Funktion $\phi(q_1, q_2, q_3)$ in der Form

$$\vec{\nabla} \phi = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \vec{e}_i$$

geschrieben werden kann.

(1 Punkt)

b) Beweisen Sie

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (A_2 h_1 h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial (A_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right]$$

(1 Punkt)

c) Beweisen Sie

$$\text{rot} \vec{A} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_j h_k} \left[\frac{\partial (A_k h_k)}{\partial q_j} - \frac{\partial (A_j h_j)}{\partial q_k} \right] \vec{e}_i \quad \text{mit } (ijk) \text{ zykl. } (1, 2, 3)$$

(1 Punkt)

Hinweis: Für b) und c) ist es hilfreich, zunächst $\vec{\nabla} q_i = \vec{e}_i / h_i$ zu zeigen.

d) Berechnen Sie explizite Ausdrücke für \vec{e}_i , grad, div und rot in Zylinderkoordinaten.

(1 Punkt)

Aufgabe 2 *Integrale über Felder*

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) Kurvenintegral:

$$\int_C x^2 y^2 + z^2 ds$$

Der Integrationsweg C ist eine Umdrehung (positive Drehrichtung) einer Schraubenlinie um die z -Achse mit Ganghöhe und Radius 1, die bei $\vec{x} = (1,0,0)^T$ startet.

(1 Punkt)

b) Oberflächenintegral: $\int_P \vec{v} d^2\vec{x}$ mit

$$P : \vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ 1 - u^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{matrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix}$$

(1 Punkt)

c) Volumenintegral: $\int_V \vec{v} d^3x$ mit $\vec{v}(\vec{x}) = (1+y, x, 0)^T / \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)^2 + 4y^2}$ über ein Volumen V der Höhe 1 mit ellipsenförmigem Querschnitt, dessen große und kleine Halbachse $a = \frac{5}{4}$, $b = \frac{3}{4}$ entlang der x - bzw. y -Achse liegen. Verwenden Sie zur Abwechslung einmal elliptische Koordinaten: $x = \cosh u \cos v$, $y = \sinh u \sin v$ und $z = z$.

(1 Punkt)