

7. Der zentrale Grenzwertsatz

Ziel der Aufgabe ist die Herleitung des zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitstheorie. Zu diesem Zweck betrachten wir N kontinuierliche Zufallsvariablen, die die Werte $x_i \in \mathbb{R}$ ($i \in \{1, \dots, N\}$) annehmen können, wobei $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariablen Werte in dem „Hyperkubus“ $[x_i, x_i + dx_i]$ annehmen ist dabei durch $w(\mathbf{x}) d^N x = w(x_1, \dots, x_N) d^N x$ gegeben. Ferner sei $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ eine bekannte Funktion der Zufallsvariablen \mathbf{x} . Dann lautet der Erwartungswert (Mittelwert) dieser Funktion bezüglich der Zufallsvariablen

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) d^N x.$$

Insbesondere bezeichnet

$$\langle x_i^n \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} x_i^n w(\mathbf{x}) d^N x$$

das n -te Moment ($n \in \mathbb{N}$) der Zufallsvariablen x_i , mit $\langle x_i \rangle$ als zugehörigem Mittelwert und $(\Delta x_i)^2 = \langle (x_i - \langle x_i \rangle)^2 \rangle$ als Varianz (Schwankungsquadrat). Schließlich definieren wir noch die charakteristische Funktion der Wahrscheinlichkeitsdichte $w(\mathbf{x})$ gemäß

$$\chi(\mathbf{k}) = \langle e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} w(\mathbf{x}) d^N x,$$

so dass wir umgekehrt die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(\mathbf{x})$ als Fouriertransformierte der charakteristischen Funktion $\chi(\mathbf{k})$ über

$$w(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \chi(\mathbf{k}) d^N k$$

erhalten.

- (a) Ausgehend von den Zufallsvariablen \mathbf{x} läßt sich die Funktion $\bar{f} = f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ ebenfalls als Zufallsvariable interpretieren. Zeigen Sie mit Hilfe der charakteristischen Funktion, dass sich deren Wahrscheinlichkeitsdichte $\bar{w}(\bar{f})$ über

$$\bar{w}(\bar{f}) = \langle \delta(\bar{f} - f(\mathbf{x})) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \delta(\bar{f} - f(\mathbf{x})) w(\mathbf{x}) d^N x$$

ergibt.

(2 Punkte)

- (b) In dieser Teilaufgabe beschränken wir uns der Einfachheit halber auf den eindimensionalen Fall mit $x \in \mathbb{R}$ als einziger Zufallsvariablen und $w(x)$ als zugehöriger Wahrscheinlichkeitsdichte. Zeigen Sie, dass sich die charakteristische Funktion $\chi(k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ unter der Voraussetzung, dass alle Momente $\langle x^n \rangle$ existieren, als Potenzreihe

$$\chi(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle$$

schreiben lässt. Die sogenannten Kumulanten C_n ($n \in \mathbb{N}$) der Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x)$ sind im Gegensatz dazu über die Potenzreihenentwicklung des Logarithmus der charakteristischen Funktion definiert:

$$\ln(\chi(k)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} C_n.$$

Zeigen Sie, dass sich die ersten drei Kumulanten gemäß

$$\begin{aligned} C_1 &= \langle x \rangle, \\ C_2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = (\Delta x)^2, \\ C_3 &= \langle x^3 \rangle - 3\langle x^2 \rangle \langle x \rangle + 2\langle x \rangle^3 \end{aligned}$$

aus den ersten drei Momenten der Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x)$ bestimmen lassen.

(2 Punkte)

- (c) Im Folgenden betrachten wir wieder den allgemeinen Fall N verschiedener Zufallsvariablen und definieren die sogenannte Kovarianzmatrix

$$V_{ik} = \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_k - \langle x_k \rangle) \rangle,$$

deren Diagonalelemente den Varianzen $(\Delta x_i)^2$ entsprechen. Die Nichtdiagonalelemente der Kovarianzmatrix sind ein Maß dafür, inwieweit die Fluktuationen der Zufallsvariablen x_i und x_k um den Mittelwert miteinander korreliert sind. Zeigen Sie, dass für eine Wahrscheinlichkeitsdichte der Form $w(\mathbf{x}) = w_1(x_1) \tilde{w}(x_2, \dots, x_N)$ alle Elemente V_{1k} ($k \in \{2, \dots, N\}$) verschwinden.

(1 Punkt)

(d) Wir kommen nun zum Beweis des zentralen Grenzwertsatzes. Dazu nehmen wir an, dass die einzelnen Zufallsvariablen x_i die verschiedenen Wahrscheinlichkeitsdichten $w_i(x_i)$ besitzen und vollständig unkorreliert sind, d.h. die Gesamtwahrscheinlichkeitsdichte ergibt sich über $w(\mathbf{x}) = w_1(x_1) w_2(x_2) \dots w_N(x_N)$. Der zentrale Grenzwertsatz sagt aus, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $\bar{w}(\bar{y}) = \langle \delta(\bar{y} - y(\mathbf{x})) \rangle$ des Mittelwerts $y(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ der verschiedenen Zufallsvariablen für große N gegen die Gaußfunktion

$$\bar{w}(\bar{y}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi(\Delta\bar{y})^2}} e^{-\frac{(\bar{y}-\langle\bar{y}\rangle)^2}{2(\Delta\bar{y})^2}} \quad (N \gg 1) \quad (1)$$

konvergiert. Der Mittelwert und die Varianz dieser Gaußverteilung sind dabei durch $\langle\bar{y}\rangle = \langle y(\mathbf{x}) \rangle$ und $(\Delta\bar{y})^2 = \frac{1}{N}(\Delta y)^2$ geben, wobei

$$\langle y(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle x_i \rangle \quad \text{und} \quad (\Delta y)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2]$$

Das heißt, im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ wird der Wert der Zufallsvariable quasi scharf, da für deren relative Schwankung

$$\frac{\Delta\bar{y}}{\langle\bar{y}\rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\Delta y}{\langle y(\mathbf{x}) \rangle} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad N \gg 1$$

gilt. Insbesondere strebt die Gaußfunktion (1) für $N \gg 1$ gegen die Delta-Funktion $\delta(\bar{y} - \langle\bar{y}\rangle)$.

Beweisen den zentralen Grenzwertsatz indem Sie Glg. (1) unter der Annahme ableiten, dass alle Momente $\langle x_i^n \rangle$ für die einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichten $w_i(x_i)$ existieren. Berücksichtigen sie in Ihrer Rechnung alle Terme in den höchsten beiden Ordnungen von $1/N$ und vernachlässigen sie alle höheren Ordnungen.

(3 Punkte)