8. Binomialverteilung

Wir betrachten N unabhängige Münzwürfe mit einer gezinkten Münze. Kopf tritt dabei mit der Wahrscheinlichkeit p, Zahl mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$ auf. Die Whrscheinlichkeit n mal Kopf nach N Münzwürfen zu finden ist durch die Binomialverteilung

$$W_N(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \tag{1}$$

gegeben.

(a) Ist $W_N(n)$ normiert ?

(1 Punkt)

(b) Berechnen Sie $\langle n \rangle$ und $\langle n^2 \rangle$.

(1 Punkt)

(c) Zeigen Sie, dass das k-te Moment durch folgende Formel gegeben ist:

$$\langle n^k \rangle = \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right)^k (p+q)^N \Bigg|_{q=1-p} \tag{2}$$

(1 Punkt)

(d) Berechnen Sie die Varianz $\mathrm{Var}(n) = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$. Wie skaliert $\sqrt{\mathrm{Var}(n)}/\langle n \rangle$ für Große N?

(1 Punkt)

9. Poisson Verteilung und Stirling Formel

Wie bereits in Aufgabe 8 betrachten wir die Binomialverteilung. Hierbei widmen wir uns dem Grenzfall kleiner Eintrittswahrscheinlichkeiten $p \ll 1$ (Bedingung A) und Großer Anzahlen an Versuchen $n \ll N$ (Bedingung B). Es soll nun eine Approximation der Binomialverteilungen in diesem Grenzfall gefunden werden. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Leiten Sie die Stirling Formel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \text{ für } n \gg 1 \tag{3}$$

als Näherung der Fakultät für große Zahlen n her. Verwenden Sie hierbei die Gamma Funktion als kontinuierliche Fortsetzung der Fakultät

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x e^{n\ln(x)-x} \tag{4}$$

und substituieren Sie $y = x/n$. Approximieren Sie das verbleibende Integral mithilfe der Sattelpunktsnäherung

$$\int_a^b \mathrm{d}x e^{nf(x)} \approx \sqrt{\frac{2\pi}{n|f''(x_0)|}} e^{nf(x_0)}, \text{ für } n \gg 1, \tag{5}$$

für f zweimal stetig differenzierbar, beliebige Endpunkte $a < b$, und x_0 das globale Maximum von f.

(1 Punkt)

(b) Zeigen Sie, dass $(1-p)^{N-n} \approx e^{-Np}$.

(1 Punkt)

(c) Zeigen Sie, dass $N!/(N-n)! \approx N^n$

(1 Punkt)

(d) Leiten Sie mithilfe der vorherigen Aufgabenteils die Poissonverteilung

$$W_N(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \tag{6}$$

als Grenzfall der Binomialverteilung unter den Bedingungen A und B, also für eine große Anzahl an Versuchen und kleine Eintrittswahrscheinlichkeiten p, her, wobei $\lambda = Np$. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Verteilung.

(1 Punkt)

(e) Beim Roulette wird in jedem Spiel eine Kugel geworfen, die zufällig auf ein Feld mit Nummer 0 bis 36 fällt, wobei jede Nummer nur einmal vorkommt. Als Coup bezeichnet man eine Serie von 37 Spielen. Berechnen Sie die mittlere Anzahl an unterschiedlichen Nummern, die während eines Coups getroffen werden. Tun Sie dies einmal mithilfe der Binomialverteilung und einmal mittels der Poissonverteilung und vergleichen Sie die erhaltenen Ergebnisse.

(1 Punkt)

10. Eigenschaften von paramagnetischen Systemen

Betrachten wir ein System, das aus einer Menge von N Spins $\frac{1}{2}$ in Gegenwart eines z-orientierten Magnetfeldes $\vec{B} = B\vec{e}_z$ besteht. Der Hamiltonian, der das System beschreibt, lautet dann

$$\hat{H} = -\mu_B B \sum_i \hat{\sigma}_i^z, \tag{7}$$

wobei μ_B das Bohr-Magneton und $\hat{\sigma}_i^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ der Pauli-Spinoperator für den i-ten Spin ist. Sei $p(\sigma_1, \dots, \sigma_N$ die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System in dem Mikrozustand $|\sigma_1, \dots, \sigma_N\rangle$ befindet:

(a) Bestimmen Sie die reduzierte Wahrscheinlichkeit $p_1(\sigma_i)$ dafür, dass sich der i-te Spin in der Konfiguration σ_i befindet, in Abhängigkeit von $p(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$.

(1 Punkt)

(b) Leiten Sie den Mittelwert $\langle \hat{M}^z \rangle$ der Gesamtmagnetisierung, definiert als $\hat{M}^z = -\mu_B \sum_i \hat{\sigma}_i^z$, aus dem Ausdruck der reduzierten Wahrscheinlichkeit ab.

(1 Punkt)

(c) Bestimmen Sie den Ausdruck für die Varianz der Magnetisierung

$$\Delta M^z = \sqrt{\langle (\hat{M}^z)^2 \rangle - \langle \hat{M}^z \rangle^2} \tag{8}$$

und zeigen Sie, dass sie in Form der reduzierten Wahrscheinlichkeit $p_1(\sigma_i)$ und der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit $p_2(\sigma_i, \sigma_j)$ dargestellt werden kann.

(1 Punkt)

(d) Wie groß ist der Mittelwert der Magnetisierung $\langle \hat{M}^z \rangle$ für den Fall, dass die Wahrscheinlichkeit, das System in der Konfiguration $|\sigma_1, \ldots, \sigma_N\rangle$ zu finden, gleichverteilt ist $p(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) = 1/2^N$? Wie großist dann die Varianz ΔM^z und wie skaliert sie mit der Systemgröße N?

(1 Punkt)