## 11. Über Entropie (I)

Betrachten Sie zwei Mengen $a$ und $b$ von paramagnetischen Ionen. Die Hamiltonianfunktion einer Menge ist

$$H_i = \mu_B B_i \sum_{j=1}^{N_i} \sigma_j,\ i = a, b; \tag{1}$$

wobei $\sigma_j = \pm 1$. Der Makrozustand jedes Systems ist charakterisiert durch drei Variablen: der Energie, dem magnetischen Feld und der Anzahl der paramagnetischen Ionen. Diese Variablen werden im Folgenden als $(U_a, B_a, N_a)$ bezeichnet für das System $a$, und $(U_b, B_b, N_b)$ für das System $b$. Beide Systeme stehen im Kontakt : ihre magnetischen Dipole wechselwirken schwach miteinander, wodurch ein Energieaustausch zwischen beiden Systemen möglich ist. Dabei kann $U_a$ und $U_b$ variieren, aber die totale Energie $U = U_a + U_b$ bleibt konstant innerhalb eines Rands $\Delta U$, da das Gesamtsystem geschlossen ist. Wir nehmen an, dass das System sich im thermischen Gleichgewicht befindet und von einer mikrokanonischen Verteilung beschreiben wird. Die Wahrscheinlichkeit von System $a$ die Energie $E_a$ zu haben ist

$$p(E_a) = \frac{A_a A_b e^{(S_a+S_b)/k}}{\int A_a A_b e^{(S_a+S_b)/k} \mathrm{d}E_a}, \tag{2}$$

wobei $k$ eine Konstante ist und

$$S_i(U_i, B_i, N_i) = kN_i \left[\frac{1}{2}(1+\rho_i)\ln\frac{2}{1+\rho_i} + \frac{1}{2}(1-\rho_i)\ln\frac{2}{1-\rho_i}\right], \tag{3a}$$

$$A_i = \frac{1}{\mu_B B_i \sqrt{2\pi N_i (1-\rho_i^2)}}, \tag{3b}$$

$$\rho_i = \frac{U_i}{N_i \mu_B B_i}, \tag{3c}$$

mit $i = a, b$. Betrachten Sie die extensive Größe $x = E_a/N_a$. Für gegebene Werte von $B_a$, $B_b$, $N_b/N_a$ und $U/N_a$, im Limes $N_a \to \infty$ ist der dominante Beitrag zu Gleichung $(2)$

$$\ln p(x) \sim N_a f(x), \tag{4}$$

wobei $f(x)$ eine extensive Größe ist.

(a) Bestimmen sie die Funktion $f(x)$.

(1 Punkt)

(b) Zeigen Sie, dass $f(x)$ konkav ist.

(2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die Taylorwicklung von $f$ um das Maximum von $f(x)$. Unter welchen Bedigungen ist es gerechtfertig die Taylorreihe nach der zweiten Ordung abzuschneiden?

(2 Punkte)

**12. Über Entropie (II)**

Wir betrachten ein System von paramagnetischen Ionen mit den inneren Energie

$$U = -N\mu_B B \frac{e^{2\mu_B B/kT} - 1}{e^{2\mu_B B/kT} + 1}. \tag{5}$$

(a) Wie verändert sich der Parameter $\beta$, definiert als

$$\beta = \frac{1}{k}\frac{\partial S}{\partial U}, \tag{6}$$

die Entropie $S$ und die Temperatur $T$, wenn die innere Energie $U$ (aus Gleichung 5) sich kontinuierlich vom Minimumswert $-N\mu_B B$ zum Maximumswert $+N\mu_B B$ ändert?
**Hinweise:** die Temperatur $T = \pm\infty$ sollten als identisch betrachten werden, während $T = 0^+$ zum Grundzustand gehört und $T = 0^-$ zum höchsten Zustand.
(2 Punkte)

(b) Nutzen Sie aus, dass die Entropie eine konkave Funktion der Energie ist um zu zeigen, dass man zwei Arten von Systemen unterscheiden kann. Die erste Art hat ein nur von unten beschränktes Energiespektrum und $\beta$ variiert von $+\infty$ bis $0^+$. Die sweite Art hat ein sowohl nach oben als auch nach unten beschräntes Spektrum und $\beta$ variiert zwischen $+\infty$ und $-\infty$.

(2 Punkte)

(c) Betrachten Sie zwei Systeme beides Art mit Anfangtemperaturen $\beta_a$ und $\beta_b > \beta_a$. Zeigen Sie, dass wenn beide Systeme im thermischen Kontakt gebracht werden, im Gleichwicht die mittlere Temperatur $\beta$, mit $\beta_a < \beta < \beta_b$ erreicht wird. Diskutieren Sie dieses Ergebnis für jede der drei möglichen Kombinationen der verschiedenen Vorzeichen der Temperaturen.

**Hinweis:** Betrachten Sie die Kurven $S_a(U_a)$ und $S_b(U_b)$; angefangen vom Endgleichwichtzustand, wo $\beta_a = \beta_b = \beta$, untersuchen Sie die Änderung der Temperaturen, wenn die Energie von einem System ins andere gebracht wird.

(2 Punkte)