16. Entropie-Elasitzität

Ein einfaches Modell für die Entropie-Elasitzität betrachte man eine eindimensionale Kette, die aus N Elementen besteht. Jedes Element det Kette habe die Länge a und soll sich entweder parallel oder antiparallel zur Verbindung der beiden Endpunkte ausrichten können. n Elemente der Kette seien antiparallel zur Verbindung der beiden Endpunkte ausgerichtet, die restlichen $N - n$ Elemente seien parallel dazu ausgerichtet. Dabei soll $N \gg 1$, $n \gg 1$ und $N - n \gg 1$ gelten.

(a) Berechnen Sie die Anzahl an Mikrozustände, die zu dem oben beschriebenen Zustand gehören. Geben Sie einen Zusammenhang swischen N, n und der Länge x der Kette an.

(1 Punkt)

(b) Wie hängt die Entropie des Systems von der Länge der Kette ab? Zeigen Sie, dass die Entropie mit der Länge der Kette abnimmt, d.h. $\partial_x S < 0$. Was bedeutet das für die Kette, wenn man annimmt, dass das System versucht, eine Konfiguration anzunehmen, bei der Entropie maximal ist.

(2 Punkte)

17. Äquivalente Definition der Entropie

Wir betrachten ein mikrokanonisches Ensemble mit N identischen Teilchen, einem Volumen V und einer Energie die Werte zwischen $E - \Delta$ und E annimmt ($\Delta > 0$). Zeigen Sie, dass die folgenden drei Formeln zu einer äquivalenten Definition der Entropie S führen, die sich lediglich durch eine additive Konstante der Ordnung $\mathcal{O}(\ln N)$ unterscheidet.

$$S = k_B \ln \Gamma(E) \tag{1a}$$
$$S = k_B \ln \omega(E) \tag{1b}$$
$$S = k_B \ln \Sigma(E). \tag{1c}$$

Hierbei ist $\Gamma(E)$ das Phasenraumvolumen, dass durch die Gesamtheit aller Mikrozutände eingenommen wird mit

$$\Gamma(E) = \int_{E-\Delta}^{E} \mathrm{d}E' \mathrm{Tr}\{\delta(E' - \hat{H})\}, \tag{2}$$

$\Sigma(E)$ ist das Phasenraumvolumen, dass von der Fläche mit energie E begrenzt wird mit

$$\Sigma(E) = \mathrm{Tr}\{\theta(E - \hat{H})\}, \tag{3}$$

und $\omega(E)$ ist die Zustandsdichte des Systems bei der Energie E und ist definiert als

$$\omega(E) = \frac{\partial \Sigma(E)}{\partial E}. \tag{4}$$

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass $\Delta \ll E$ und dass der durch den Integranden in Gl.(2) beschriebene Hyperkörper derart beschaffen ist, dass $\Sigma(E-\Delta)/\Sigma(E) \to 0$, für festes Δ und $N \to \infty$.

(2 Punkte)

18. Mikrokanonische Beschreibung der Paramagneten

Betrachten Sie erneut ein System aus N unterscheidbaren Spin-1/2 Teilchen in einem Magnetfeld. Die einzelnen Spins können nur zwei Energiewerte $E_- = -E_0/2$ oder $E_+ = +E_0/2$ annehmen. Sei n_- die Besetzung von E_- und n_+ die Besetzung von E_+. Die Gesamtenergie des Systems sei U.

(a) Bestimmen Sie die Entropie des Systems im mikrokanoonischen Ensemble.

(1 Punkt)

(b) Finden Sie die wahrscheinlichsten Werte für n_+ und bestimmen Sie die Standardabweichung von diesen Werten.

(1 Punkt)

(c) Bestimmen Sie die Temperatur und zeigen Sie, dass sie negative Werte annehmen kann.

(1 Punkt)

(d) Nehmen Sie an, ein Reservoir mit negativer Temperatur wird in Kontakt mit einem Reservoir positiver Temperatur gebracht. In welche Richtung Fließt die Wärme?

(1 Punkt)

19. Die von Neumann Gleichung

Zeigen Sie, dass die formale Lösung der von Neumann Gleichung

$$\partial_t \rho_t = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \rho_t] \tag{5}$$

durch folgende Gleichung gegeben ist

$$\hat{\rho} = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\hat{\rho}_0 e^{i\hat{H}t/\hbar}, \tag{6}$$

wobei $\hat{\rho}_0$ die Dichtematrix zum Zeitpunkt $t = 0$ ist.

(1 Punkt)