16. Entropie des idealen Gases

Betrachten Sie ein klassisches ideales Gases von Teilchen der Mass m. Die Hamiltonsche Funktion ist dann gegeben durch

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{N} p_i^2, \tag{1}$$

mit dem Impuls p_i des i-ten Teilchens.

(a) Bestimmen Sie das Phasenraumvolumen $\Sigma(E)$ mit

$$\Sigma(E) = \frac{1}{h^{3N}} \int_{H(p,q)<E} \mathrm{d}^{3N}q \mathrm{d}^{3N}p, \tag{2}$$

und bestimmen Sie hieraus folgende Formel für die Entropie S des idealen Gases

$$S = Nk_B \ln\left[V\left(\frac{E}{N}\right)^{3/2}\right] + \frac{3}{2}Nk_B\left[1 + \ln\left(\frac{4\pi m}{3h^2}\right)\right] \tag{3}$$

Hinweis: Die Fläche der $3N$ dimensionalen Einheitskugel beträgt $2\frac{\pi^{3N/2}}{\Gamma(3N/2)}$.

(4 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass aus der Formel für die Entropie in Gl.(3) die kalorische Zustandgleichung $E = \frac{3}{2}k_B T$ sowie die thermische Zustandgleichung $pV = k_B NT$ folgen.

(2 Punkte)

17. Gibbssches Paradoxon

Wir haben bereits gezeigt, dass die Entropie eines idealen Gases durch die folgende Formel

$$S = Nk_B \ln(Vu^{3/2}) + Ns_0, \tag{4}$$

gegeben ist, wobei $u = \frac{3}{2}k_BT$ und $s_0 = \frac{3k_B}{2}\left(1 + \ln\frac{4\pi m}{3h^2}\right)$. Betrachten Sie zwei ideale Gase mit N_1 bzw. N_2 Teilchen, die in zwei getrennten Volumen V_1 und V_2 bei gleicher Temperatur und gleicher Dichte gehalten werden.

(a) Bestimmen Sie die Differenz der Entropie des kombinierten Systems, nachdem die Gase sich in einem gemeinsamen Volumen $V = V_1 + V_2$ vermischt haben, und zeigen Sie, dass diese Entropieänderung durch

$$\frac{\Delta S}{k_B} = N_1 \ln\frac{V}{V_1} + N_2 \ln\frac{V}{V_2}, \tag{5}$$

dargestellt wird, welche die Mischungsentropie darstellt.

(1 Punkt)

(b) Das Gibbs-Paradoxon tritt auf, wenn man den Fall von zwei identischen idealen Gasen betrachtet. Da die Herleitung von Gl.(5) unabhängig von der Identität der Gase ist, würde die Verbindung der beiden Systeme auch zu einer Erhöhung der Entropie führen. Dies ist ein verhängnisvolles Ergebnis, da es bedeutet, dass die Entropie eines Gases von seiner Geschichte abhängt und daher nicht nur eine Funktion des thermodynamischen Zustands des Gases sein kann. Gibbs löste dieses Paradoxon, indem er postulierte, dass der Ausdruck für $\Sigma(E)$, die Anzahl der Zustände unterhalb der Energie E, unvollständig ist und durch $N!$ geteilt werden sollte. Zeigen Sie, dass die Entropie des idealen Gases dann wie folgt lautet

$$S = Nk_B \ln\left[\frac{V}{N}u^{3/2}\right] + \frac{3}{2}Nk_B\left[\frac{5}{3} + \ln\left(\frac{4\pi m}{3h^2}\right)\right]. \tag{6}$$

(1 Punkt)

(c) Berechnen Sie die Mischungsentropie für den Fall unterschiedlicher Gase und dann für identische Gase und zeigen Sie, dass Gl.(6) das Gibbs-Paradoxon löst.

(1 Punkt)

18. Symmetrische und antisymmetrische Zustände von Quantenteilchen

Betrachten wir ein einzelnes Teilchen mit Spin S, das in einem eindimensionalen Kasten eingeschlossen ist. Der Hamilton-Operator $\hat{H}_1$, der das Teilchen repräsentiert, lautet dann

$$\hat{H}_1 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}), \tag{7}$$

wobei $V(x) = 0$ für $0 < x < L$ und $V(x) \to +\infty$ für jeden anderen Fall.

(a) Bestimmen Sie die Eigenenergien und Eigenvektoren von $\hat{H}_1$.

(1 Punkt)

(b) Betrachten Sie nun zwei nicht wechselwirkende Teilchen, die durch den gemeinsamen Hamiltonian $\hat{H}_2 = \hat{H}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \hat{H}_1$. Bestimmen Sie die Form der Eigenenergien und Eigenvektoren, wenn $S = 0$ (bosonischer Fall). Wie lautet der Grundzustand und seine Energie? Dieselbe Frage für den ersten angeregten Zustand?

(1 Punkt)

(c) Betrachten Sie nun fermionische Teilchen mit Spin $S = \frac{1}{2}$ und bestimmen Sie die Eigenvektoren und die entsprechenden Eigenenergien. Welche Form nehmen der Grundzustand und der erste angeregte Zustand an?

(1 Punkt)