19. Teilchenzahl-Fluktuationen im Großkanonischen Ensemble

Im großkanonischen Ensemble werden die Erwartungswerte einer Größe $A(\{n_{\boldsymbol{p},s}\})$, die von den Besetzungszahlen $n_{\boldsymbol{p},s}$ abhängt, gemäß der Relation

$$\langle A\rangle = \frac{1}{\mathcal{Q}(V,\beta,z)}\sum_{N=0}^{+\infty} z^N \sum_{\substack{\{n_{\boldsymbol{p},s}\}\\ \sum n_{\boldsymbol{p},s}=N}} A(\{n_{\boldsymbol{p},s}\})e^{-\beta\sum_{\boldsymbol{p},s}\epsilon_{\boldsymbol{p}}n_{\boldsymbol{p},s}} \tag{1}$$

berechnet. Die großkanonische Zustandssumme ist hierbei gegeben durch

$$\mathcal{Q}(V,\beta,z) = \prod_{\boldsymbol{p},s}[1 \mp ze^{-\beta\epsilon_{\boldsymbol{p}}}]^{\mp 1} \tag{2}$$

mit einem Minus im Falle von Bose-Einstein-Statistik und einem Plus für Fermi-Dirac-Statistik. Hierbei durchlaufen die Besetzungszahlen $n_{\boldsymbol{p}}$ die Werte $n_{\boldsymbol{p},s} \in \{0,1,2,3,\dots\}$ für Bosonen und $n_{\boldsymbol{p},s} \in \{0,1\}$ für Fermionen.

(a) Zeigen Sie zunächst mithilfe von Gl.(1) die Gültigkeit der Relation

$$\langle n_{\boldsymbol{p}}\rangle = \sum_{s=-S}^{S}\langle n_{\boldsymbol{p},s}\rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\epsilon_{\boldsymbol{p}}}\ln\mathcal{Q} \tag{3}$$

und bestimmen Sie hieraus die mittlere Besetzungszahlen

$$\langle n_{\boldsymbol{p}}\rangle = (2S+1)\frac{ze^{-\beta\epsilon_{\boldsymbol{p}}}}{1 \mp ze^{-\beta\epsilon_{\boldsymbol{p}}}} \tag{4}$$

mit einem Minus für Bose-Einstein- und einem Plus für Fermi-Dirac-Statistik.

(2 Punkte)

(b) Leiten Sie nun den Zusammenhang

$$-\frac{1}{\beta}\frac{\partial\langle n_{\boldsymbol{p}}\rangle}{\partial\epsilon_{\boldsymbol{p}}} = \langle n_{\boldsymbol{p}}^2\rangle - \langle n_{\boldsymbol{p}}\rangle^2 \tag{5}$$

her, und zeigen Sie damit, dass für die relativen Teilchenzahl-Fluktuationen Folgendes gilt

$$\frac{\langle n_{\boldsymbol{p}}^2\rangle - \langle n_{\boldsymbol{p}}\rangle^2}{\langle n_{\boldsymbol{p}}\rangle^2} = \frac{1}{\langle n_{\boldsymbol{p}}\rangle} \pm 1, \tag{6}$$

mit einem Plus für Bose-Einstein und einem Minus für Fermi-Dirac-Statistik.

(2 Punkte)

20. Ideale Boltzmann-Gase im großkanonischen Ensemble

Betrachten wir ein ideales Gas aus N nicht-wechselwirkenden Teilchen der Masse m mit der Energie

$$E = \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{p^2}{2m} n_{\boldsymbol{p}}. \tag{7}$$

Außerdem nehmen wir an, dass das Gas mit einem Reservoir bei der eingestellten Temperatur T und dem chemischen Potential μ in Kontakt gebracht wird.

(a) Gemäß der vorherigen Aufgabe sollte die innere Energie eines idealen Gases im großkanonischen Ensemble

$$U = \frac{1}{\mathcal{Q}(V,\beta,z)} \sum_{N=0}^{+\infty} z^N \sum_{\substack{\{n_{\boldsymbol{p}}\} \\ \sum n_{\boldsymbol{p}} = N}} E(\{n_{\boldsymbol{p}}\}) e^{-\beta E} \tag{8}$$

lauten. Zeigen Sie, dass sie durch die großkanonische Zustandssumme wie folgt

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \mathcal{Q} \tag{9}$$

ausgedrückt werden kann

(1 Punkt)

(b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass im Falle eines idealen Gases die großkanonische Verteilungsfunktion durch die folgende Form

$$\mathcal{Q} = \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{z^N}{N!} V^N \left(\frac{m k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3N/2} \tag{10}$$

dargestellt wird. Verwenden Sie die Definition der thermischen Wellenlänge $\lambda = \sqrt{\frac{m k_B T}{2\pi\hbar^2}}$, und zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion durch

$$\mathcal{Q} = e^{zV/\lambda^3} \tag{11}$$

gegeben ist.

(1 Punkt)

(c) Beweisen Sie mit Gl. (1) und der Beziehung $\frac{PV}{k_B T} = \ln \mathcal{Q}$, dass die innere Energie durch die Zustandsgleichung

$$U = \frac{3}{2} PV \tag{12}$$

dargestellt werden kann.

(1 Punkt)