24. Weiße Zwerge und die Chandrasekhar Masse (Bonus)

In Ausgabe 23 haben wir gezeigt, dass die Zustandsgleichung eines relativistischen Fermi-Gases durch die folgende Form

$$P = Cn_e^{\frac{1+n}{n}}, \tag{1}$$

gegeben ist, wobei n_e die Dichte des Elektronengases und n der Polytropen-Index sind. Unter der Annahme, dass die Massendichte im Inneren eines weißen Zwerges der gleichen Verteilung folgt, erwarten wir, dass der lokale Druck $P(r) = K(\rho(r))^{\frac{1+n}{n}}$ im hydrostatischen Gleichgewicht ist und die Lösung der folgenden Gleichung

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r^2}{\rho(r)}\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r}\right) = -4\pi G\rho(r) \tag{2}$$

ist.

(a) Ersetzen Sie in Gl.(2) die Massendichte $\rho(r)$ durch die dimensionslose Funktion $\theta(r)$, die über $\rho(r) = \rho_c\theta^n(r)$ definiert ist. Dabei bezeichnen wir mit $\rho_c = \rho(0)$ die Massendichte im Zentrum des weißen Zwergs. Führen Sie des Weiteren die neue Koordinate $\xi = r/a$ über die Skalierungskonstante $a^2 = \frac{(n+1)K}{4\pi G}\rho_c^{(1-n)/n}$ ein und zeigen Sie damit, das sich die Differentialgleichung (2) in die folgende Form bringen lässt

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right) = -\theta^n. \tag{3}$$

Wie lautet die Anfangsbedingungen für $\xi = 0$, die die Lösung $\theta(\xi)$ dieser Differentialgleichung eindeutig festlegen?

(2 Punkte)

(b) Begründen Sie, warum die erste Nullstelle ξ_1 der dimensionslosen Massendichte $\theta(\xi)$ den Radius R des weißen Zwerges bestimmt. Beweisen Sie, dass seine Masse $M = M(R)$ entsprechend durch die Gleichung

$$M(R) = 4\pi\rho_c R^3\left(-\frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right)\bigg|_{\xi=\xi_1} \tag{4}$$

gegeben ist.

Hinweis: Die numerische Integration der Differentialgleichung (3) liefert folgende Werte:

- Nichtrelativistischer Grenzfall: erste Nullstelle $\xi_1^{nr} = 3.65$ und $\left(-\frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right)\Big|_{\xi=\xi_1}^{nr} = 0.055642$.
- Ultrarelativistischer Grenzfall: erste Nullstelle $\xi_1^{ur} = 6.90$ und $\left(-\frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right)\Big|_{\xi=\xi_1}^{ur} = 0.006152$.

(c) Bestimmen Sie ρ_c als Funktion von R und beweisen Sie damit den Zusammenhang

$$M(R) = 4\pi \left(\frac{4\pi G}{\xi_1^2 K(n+1)}\right)^{\frac{n}{1-n}} \left(-\frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right)\Bigg|_{\xi=\xi_1} R^{\frac{3-n}{1-n}} \tag{5}$$

zwischen Masse und Radius des weißen Zwerges.

(1 Punkt)

(d) Zeigen Sie, dass im nichtrelativistischen Grenzfall die Masse-Radius Relation (5)

$$\left(\frac{M}{M_\odot}\right) R^3 \approx (8887\ \mathrm{km})^3 \tag{6}$$

lautet, wobei $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$kg die Masse unserer Sonne ist. Was passiert demnach mit dem Radius R, wenn wir die Masse M des weißen Zwerges erhöhen?

(1 Punkt)

(e) Zeigen Sie, dass die Masse M des weißen Zwerges im ultrarelativistischen Fall nicht von dessen Radius R abhängt und bestimmen Sie für diesen Fall aus (5) die Chandrasekhar Grenzmasse

$$M_{\mathrm{ch}} \approx 1.46 M_\odot. \tag{7}$$

Was für ein Schicksal erwartet einen Stern, nachdem er seinen Wasserstoffvorrat aufgebraucht hat, wenn seine Masse größer als die Chandrasekhar-Masse ist?

(1 Punkt)

25. Thermodynamische Funktionen des Bose-Gases

Im Folgenden sollen thermodynamische Funktionen des idealen Bose-Gases hergeleitet werden. Die Zustandsgleichung im Grenzfall großer Volumina ist hierbei gegeben durch

$$\frac{P}{k_B T} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z), \ (T > T_c) \\ \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(1), \ (T < T_c) \end{cases} \tag{8}$$

mit der kritischen Temperatur T_c unterhalb derer Kondensation auftritt. Die Fugazität wird hierbei für $\lambda^3/v < g_{3/2}(1)$ durch die Nullstelle der Gleichung

$$\frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(z) \tag{9}$$

definiert. Für $\lambda^3/v > g_{3/2}(1)$ ist $z = 1$. Des Weiteren ist Gl. (9) äquivalent zu

$$\frac{g_{3/2}(z)}{g_{3/2}(1)} = \left(\frac{T_c}{T}\right)^{3/2}. \tag{10}$$

(a) Leiten Sie her, dass die innere Energie U folgende Form annimmt

$$\frac{U}{N} = \begin{cases} \frac{3}{2}\frac{k_B T v}{\lambda^3} g_{5/2}(z), \ (T > T_c) \\ \frac{3}{2}\frac{k_B T v}{\lambda^3} g_{5/2}(1), \ (T < T_c). \end{cases} \tag{11}$$

(1 Punkt)

(b) Zeigen Sie, dass $g_{n-1}(z) = z\frac{\partial}{\partial z} g_n(z)$. Zeigen Sie daraufhin mithilfe der Gl. (9) und (10), dass die Ableitung der Fugazität nach der Temperatur folgende Relation erfüllt

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial T} = -\frac{3}{2}\frac{\lambda^3}{Tv}\frac{1}{g_{1/2}(z)} = -\frac{3}{2}\frac{1}{T}\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}. \tag{12}$$

(1 Punkt)

(c) Bestimmen Sie mithilfe von Gl. (11) und (12) die spezifische Wärme bei konstantem Volumen C_V. Das Ergebnis ist hierbei gegeben durch

$$\frac{C_V}{N k_B} = \begin{cases} \frac{15}{4}\frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \frac{9}{4}\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}, \ (T > T_c) \\ \frac{15}{4}\frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(1), \ (T < T_c). \end{cases} \tag{13}$$

(2 Punkte)

(d) Betrachten Sie den Grenzwert $T \to \infty$ und zeigen Sie, dass $\frac{C_V}{Nk_B} \to \frac{3}{2}$. (1 Punkt)

(e) Betrachten Sie nun tiefe Temperaturen $T \to 0$ und zeigen Sie, dass $\frac{C_V}{Nk_B} \propto T^{3/2}$.

(1 Punkt)

(f) Wir wollen nun die Diskontinuität in der Ableitung der spezifischen Wärme bei $T = T_c$ untersuchen. Bestimmen Sie hierzu die Ableitung der spezifischen Wärme für $T < T_c$ und $T > T_c$ und zeigen Sie, dass

$$\left(\lim_{T\to T_c^+} \frac{\partial}{\partial T}\frac{C_V}{Nk_B}\right) - \left(\lim_{T\to T_c^-} \frac{\partial}{\partial T}\frac{C_V}{Nk_B}\right) = -\frac{27}{16\pi}\frac{\zeta(3/2)^2}{T_c} \approx -\frac{3.66}{T_c} \tag{14}$$

mit der Riemannschen Zeta Funktion $\zeta(n)$.

Hinweise: Die Polylogarithmen g_n haben einen wohldefinierten Grenzwert für $z \to 1^-$ für $n > 1$ wohingegen $g_{1/2}(z)$ und $g_{-1/2}(z)$ im Grenwert gegen 1^- divergieren. Für $n > 1$ gilt für den Wert der Polylogarithmen bei $z = 1$ folgende Relation

$$g_n(1) = \zeta(n),\ n > 1, \tag{15}$$

mit der Riemannschen Zeta Funktion ζ. Des Weiteren darf folgender Grenzwert in der Rechnung verwendet werden

$$\lim_{z\to 1^-} \frac{g_{1/2}^3(z)}{g_{-1/2}(z)} = 2\pi. \tag{16}$$

(3 Punkte)

26. Bose Gas in zwei Dimensionen

(a) Berechnen Sie den Logarithmus der großkanonischen Zustandssumme in dem Grenzfall

$$\lim_{V\to\infty} \frac{1}{V} \ln \mathcal{Q}(z, V, T) = \frac{1}{\lambda^2} g_2(z) \tag{17}$$

indem Sie folgende Integraldarstellung von $\ln \mathcal{Q}$ für große Volumina verwenden

$$\ln \mathcal{Q} = -\frac{2\pi L^2}{h^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}p p \ln(1 - z e^{-\beta \epsilon_p}), \tag{18}$$

wobei $V = L^2$ die dem System zur Verfügung stehende Fläche darstellt.

(2 Punkte)

(b) Berechnen Sie die mittlere Anzahl an Teilchen pro Flächeneinheit als Funktion von z und T.

(2 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass im Fall eines zweidimensionalen Bose-Gases keine Bose-Einstein Kondensation stattfinden kann, und begründen Sie das Result ihrer Rechnung physikalisch.

Hinweis: Zeigen Sie, dass das Integral für N divergiert, wenn sich die Fugazität z dem Wert 1 annähert.

(4 Punkte)