30. Boltzmann-Gleichung im hydrodynamischen Regime und Lösungsansatz 0.-ter Ordnung

Ziel der Aufgabe ist die hydrodynamischen Gleichungen aus dem Lösungsansatz 0.-ter Ordnung der Boltzmann-Gleichung abzuleiten. Dabei nehmen wir an, dass die freie Weglänge zwischen den einzelnen Stößen viel kleiner sein soll, als alle anderen charakteristischen Längenskalen, was dazu führt, dass sich das Gas lokal im Gleichgewicht befinden und dort einer Maxwell-Boltzmann Verteilung genügen sollte. In diesem Regime scheint daher $f(\vec{x},\vec{p};t) = f^{(0)}(\vec{x},\vec{p};t) + g(\vec{x},\vec{p};t)$ als Lösungsansatz für die Boltzmann-Gleichung sinnvoll, wobei

$$f^{(0)} = (\vec{x},\vec{p};t) = \frac{\varrho(\vec{x},t)}{m}\cdot\left(\frac{1}{2\pi mkT(\vec{x},t)}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{(\vec{p}-m\vec{u}(\vec{x},t))^2}{2mkT(\vec{x},t)}\right]$$

und $g(\vec{x},\vec{p}_1;t)$ eine kleine Korrektur darstellt. In der lokalen Maxwell-Boltzmann Verteilung $f^{(0)}$ bezeichnet $T(\vec{x},t)$ die lokale Temperatur, $\varrho(\vec{x},t)$ die lokale Massendichte und $\vec{u}(\vec{x},t)$ die lokale, mittlere Geschwindigkeit.

(a) Zeigen Sie durch explizites Berechnen der Integrale, dass

(i) $m\int_{\mathbb{R}^3} f^{(0)}(\vec{x},\vec{p};t)\,d^3p = \varrho(\vec{x},t)\,,$

(ii) $m\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{\vec{p}}{m}\right) f^{(0)}(\vec{x},\vec{p};t)\,d^3p = \varrho(\vec{x},t)\,\vec{u}(\vec{x},t)\,,$

(iii) $\varrho(\vec{x},t)\,\varepsilon(\vec{x},t) \equiv m\int_{\mathbb{R}^3}\frac{m}{2}\left(\frac{\vec{p}}{m}-\vec{u}\right)^2 f^{(0)}(\vec{x},\vec{p};t)\,d^3p = \frac{3}{2}\,\varrho(\vec{x},t)\,kT(\vec{x},t)\,,$

wobei $\varepsilon(\vec{x},t) = \langle\frac{m}{2}(\frac{\vec{p}}{m}-\vec{u})^2\rangle$ die mittlere thermische Energiedichte bezeichnet.

(4 Punkte)

(b) Verifizieren Sie mit Hilfe der Definition der Boltzmann-Gleichung, dass für $f^{(0)}(\vec{x},\vec{p};t)$ der Stoßterm

$$\left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t}\right)_{\text{coll}} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3p_2\int_{\mathbb{R}^3} d^3p_1'\int_{\mathbb{R}^3} d^3p_2'\,W(\vec{p}_1,\vec{p}_2|\vec{p}_1',\vec{p}_2')\left(f_1^{(0)\prime}f_2^{(0)\prime} - f_1^{(0)}\,f_2^{(0)}\right)$$

verschwindet, wobei die Übergangswahrscheinlichkeit

$$W(\vec{p}_1,\vec{p}_2|\vec{p}_1',\vec{p}_2') = |\mathcal{T}_{fi}|^2\delta^{(3)}(\vec{p}_1+\vec{p}_2-\vec{p}_1'-\vec{p}_2')\delta\left(\frac{1}{2m}(|\vec{p}_1|^2+|\vec{p}_2|^2-|\vec{p}_1'|^2-|\vec{p}_2'|^2)\right)$$

ist.

(2 Punkte)

(c) In der Näherung 0.-ter Ordnung wird angenommen, dass $f^{(0)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}_1; t)$ eine approximative Lösung der Boltzmann-Gleichung ist, d.h.

$$\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{p_{1,i}}{m} \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial p_{1,i}} \right] \approx 0 \,.$$

Begründen Sie hiermit die approximative Gültigkeit der folgenden Relationen

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}_{\vec{x}}(\varrho\, \vec{u}) \approx 0 \tag{1}$$

$$\varrho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) u_i \approx - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\varrho}{m} F_i \tag{2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \big(E\, u_k + \sum_{i=1}^{3} P_{ki}\, u_i + J_k \big) \approx \frac{\varrho}{m} \sum_{k=1}^{3} u_k\, F_k \tag{3}$$

folgt, wobei $E(\vec{x}, t) = \frac{\varrho}{2}\, \vec{u}^{\,2}(\vec{x}, t) + \frac{\varrho}{m}\, \varepsilon(\vec{x}, t)$ die Energiedichte,

$$P_{ik}(\vec{x}, t) = \varrho \left\langle \big(\tfrac{p_i}{m} - u_i \big) \big(\tfrac{p_k}{m} - u_k \big) \right\rangle = m \int_{\mathbb{R}^3} \big(\tfrac{p_i}{m} - u_i \big) \big(\tfrac{p_k}{m} - u_k \big)\, f^{(0)}(\vec{x}, \vec{p}; t)\, d^3p$$

den Drucktensor und

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{x}, t) &= \frac{\varrho}{m} \left\langle \left(\frac{\vec{p}}{m} - \vec{u} \right) \frac{m}{2} \left(\frac{\vec{p}}{m} - \vec{u} \right)^2 \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\vec{p}}{m} - \vec{u} \right) \frac{m}{2} \left(\frac{\vec{p}}{m} - \vec{u} \right)^2 f^{(0)}(\vec{x}, \vec{p}; t)\, d^3p \end{aligned}$$

die lokale Wärmestromdichte bezeichnet.

(2 Punkte)

(d) Beweisen Sie durch Einsetzen der lokalen Maxwell-Boltzmann Verteilung $f^{(0)}$ in die obigen Ausdrücke, dass

(iv) $P_{ik}(\vec{x}, t) = P(\vec{x}, t)\, \delta_{ik}$ mit $P = \frac{\varrho}{m} kT$,

(v) $\vec{J}(\vec{x}, t) = 0$.

(3 Punkte)

(e) Leiten Sie ausgehend von den Gleichungen (1)-(3) die folgende Entwicklungsgleichung für die mittlere thermische Energiedichte ab:

$$\frac{\varrho}{m}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\varepsilon+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial J_i}{\partial x_i} \approx -\sum_{i,k=1}^{3} P_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,.$$

(2 Punkte)

(f) Folgern Sie mit Hilfe der Relationen (i)-(v), dass der Lösungsansatz 0.-ter Ordnung der Boltzmann-Gleichung die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen (ohne Dissipation) impliziert:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\vec{\nabla}_{\vec{x}}(\varrho\,\vec{u}) \approx 0\\
&\varrho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)u_i \approx -\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{\varrho}{m}F_i\\
&\frac{\varrho}{m}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\varepsilon \approx -P\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

Stellen diese Bewegungsgleichungen ein geschlossenes System von Gleichungen dar, mit denen die Dichten $\varrho(\vec{x},t)$, $\vec{u}(\vec{x},t)$ und $\varepsilon(\vec{x},t)$ eindeutig bestimmt werden können?

(2 Punkte)

31. Die Maxwell-Boltzmann-Verteilungsfunktion als wahrscheinlichste Verteilung

Sofern wir nur an den Eigenschaften eines Gases im Gleichgewicht interessiert sind, existiert neben dem Zugang über die Boltzmann-Gleichung eine alternative Herleitung der Maxwell-Boltzmann-Verteilungsfunktion im μ-Raum, die in dieser Aufgabe vorgestellt werden soll.

Dabei gehen wir von einem Ensemble isolierter Systeme mit konstanter Energie $\tilde{E} \in [E, E+\Delta]$ aus. Jedes dieser Systeme bestehe aus N unterscheidbaren Teilchen deren Positionen und Impulse durch $\boldsymbol{q}=(q_1,\ldots,q_{3N})$ und $\boldsymbol{p}=(p_1,\ldots,p_{3N})$ geben sind und die sich in einem endlichen Volumen $V \subset \mathbb{R}^3$ befinden. Es sollen keine äußeren Kräfte auf die Teilchen wirken. Das gesamte Phasenraumvolumen, das den Mikrozuständen $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ des Ensembles zur Verfügung steht, sei mit $\mathcal{G}$ bezeichnet. Desweiteren nehmen wir an, dass unser System im Gleichgewicht durch die Dichtefunktion des mikrokanonischen Ensembles (Postulat der gleichen „a priori“ Wahrscheinlichkeit)

$$\rho_{\text{mic}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(E)} & \forall \ (\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^{6N} \ \text{ mit } \ E < H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) < E+\Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben wird ($\Delta \ll E$). Das heißt, alle Mikrozustände $(\,\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\,)$ des Systems, für die die makroskopische „Nebenbedingung“ $E < H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) < E+\Delta$ gilt, treten im Ensemblemittel gleichwahrscheinlich auf.

Die aus $\rho_{\text{mic}}(\vec{p},\vec{q})$ entsprechend Einteilchen-Verteilungsfunktion $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ im μ-Raum ($\boldsymbol{x},\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$) ist schwer zu berechnen. Aus diesem Grund verfolgen wir in dieser Aufgabe einen alternativen Zugang zur Maxwell-Boltzmann-Verteilung. Zuerst unterteilen wir den für die Teilchen zugänglichen μ-Raum in kleine Gebiete μ_i ($i \in \{1,\dots K\}$, $K \gg 1$) deren Positionen wir mit $(\boldsymbol{p}_i,\boldsymbol{x}_i)$ bezeichnen und deren Volumen $(\Delta p)^3\,(\Delta\, q)^3$ sei. Die Anzahl der Teilchen in der i-ten Zelle ist dann durch

$$n_i = \int_{\mu_i} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\, d^3p\, d^3x$$

gegeben und im Grenzfall unendlich kleiner Gebiete μ_i kann die Verteilungsfunktion $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ beliebig nahe durch die Besetzungszahlen n_i angenähert werden. Die Energie eines Teilchens in der i-ten Zelle ist durch $\epsilon_i = \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m}$ gegeben (Wechselwirkungsenergie vernachlässigt, da Wechselwirkungsradius $r_0 \ll \Delta\, q$). Laut Voraussetzung ist unser System isoliert, weshalb die Besetzungszahlen n_i die folgenden Nebenbedingungen erfüllen:

$$\sum_{i=1}^{K} n_i = N \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{K} n_i\,\epsilon_i = \tilde{E}\,. \tag{4}$$

(a) Angenommen, das Gas befinde sich in einem bestimmten Mikrozustand $(\,\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\,)$. Sind dadurch die Werte der einzelnen Besetzungszahlen $n_i \in \mathbb{N}_0$ eindeutig festgelegt? Wird umgekehrt durch eine vorgegebene Besetzung $\{n_i\}$ der Mikrozustand des Gases eindeutig festgelegt? Begründen Sie anhand eines einfachen Beispiels.

(1 Punkt)

(b) Wie viele Mikrozustände existieren zu einer vorgegebenen Besetzung $\{n_i\}$? Begründen Sie, dass das Volumen im Phasenraum $\Omega\{n_i\} \in \mathcal{G}$, das einer bestimmten Besetzung $\{n_i\}$ entspricht, durch den Ausdruck

$$\Omega\{n_i\} = C \cdot \frac{N!}{n_1!\, n_2! \dots n_K!}$$

gegeben ist. Der genaue Wert der von den n_i unabhängigen Proportionalitätskonstanten C ist dabei nicht von Interesse.

(2 Punkte)

(c) Wir nehmen an, dass die gesuchte Verteilungsfunktion $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ des Gases im Gleichgewicht die *wahrscheinlichste* Verteilungsfunktion ist, d. h. wir gehen davon aus, dass die zu $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ gehörige Besetzung $\{\bar{n}_i\}$ das größte Phasenraumvolumen in $\mathcal{G}$ einnimmt ($\Omega\{\bar{n}_i\} \geq \Omega\{n_i\}$ für alle Besetzungen $\{n_i\}$, die die Nebenbedingungen (4) erfüllen). Bestimmen Sie das Maximum von $\ln(\Omega\{n_i\})$ unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen (4) mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren und zeigen Sie damit, dass

$$\bar{n}_i = \alpha \cdot e^{-\beta \epsilon_i}\,, \quad \alpha, \beta = \text{const.}\ .$$

Betrachten Sie dabei die Besetzungszahlen $\bar{n}_i \gg 1$ als reelle Zahlen und verwenden Sie die Stirlingsche Formel in der niedrigsten Näherung $\ln n! \approx n \ln n - n$. Zeigen Sie insbesondere, dass es sich um ein Maximum von $\ln(\Omega\{n_i\})$ handelt und nicht um eine Minimum.

(3 Punkte)

(d) Leiten Sie aus diesem Ergebnis die Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \frac{n}{(2\pi\, mkT)^{3/2}}\, e^{-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2mkT}}$$

ab, wobei $n = N/V$ die konstante Teilchendichte bezeichnet. Bestimmen Sie hierbei die Konstanten α und β in Analogie zur Vorlesung über die stationäre Lösung der Boltzmann-Gleichung.

(3 Punkte)