Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik IV

WiSe 2022/23 **Blatt 5** **08.11.2022**

Aufgabe 11 *Poisson Verteilung und Stirling Formel*

Wir betrachten N unabhängige Münzwürfe mit einer gezinkten Münze. Kopf tritt dabei mit der Wahrscheinlichkeit p, Zahl mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$ auf. Die Wahrscheinlichkeit n mal Kopf nach N Münzwürfen zu finden ist durch die Binomialverteilung

$$W_N(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \tag{1}$$

gegeben. Hierbei widmen wir uns dem Grenzfall kleiner Eintrittswahrscheinlichkeiten $p \ll 1$ (Bedingung A) und Großer Anzahlen an Versuchen $n \ll N$ (Bedingung B). Es soll nun eine Approximation der Binomialverteilungen in diesem Grenzfall gefunden werden. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Leiten Sie die Stirling Formel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \text{für}\, n \gg 1 \tag{2}$$

als Näherung der Fakultät für große Zahlen n her. Verwenden Sie hierbei die Gamma Funktion als kontinuierliche Fortsetzung der Fakultät

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x e^{n\ln(x)-x} \tag{3}$$

und substituieren Sie $y = x/n$. Approximieren Sie das verbleibende Integral mithilfe der Sattelpunktsnäherung

$$\int_a^b \mathrm{d}x e^{nf(x)} \approx \sqrt{\frac{2\pi}{n|f''(x_0)|}} e^{nf(x_0)}, \text{für}\, n \gg 1, \tag{4}$$

für f zweimal stetig differenzierbar, beliebige Endpunkte $a < b$, und x_0 das globale Maximum von f.

(1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass $(1-p)^{N-n} \approx e^{-Np}$.

(1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass $N!/(N-n)! \approx N^n$

(1 Punkt)

d) Leiten Sie mithilfe der vorherigen Aufgabenteils die Poissonverteilung

$$W_N(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \tag{5}$$

als Grenzfall der Binomialverteilung unter den Bedingungen A und B, also für eine große Anzahl an Versuchen und kleine Eintrittswahrscheinlichkeiten p, her, wobei $\lambda = Np$. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Verteilung.

(1 Punkt)

Aufgabe 12 *Der zentrale Grenzwertsatz*

Ziel der Aufgabe ist die Herleitung des zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitstheorie. Zu diesem Zweck betrachten wir N kontinuierliche Zufallsvariablen, die die Werte $x_i \in \mathbb{R}$ ($i \in \{1, \dots N\}$) annehmen können, wobei $\boldsymbol{x}^T = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariablen Werte in dem "Hyperkubus" $[x_i, x_i + dx_i]$ annehmen ist dabei durch $w(\boldsymbol{x})\, d^N x = w(w_1, \dots, x_N) d^N x$ gegeben. Ferner sei $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ eine bekannte Funktion der Zufallsvariablen $\boldsymbol{x}$. Dann lautet der Erwartungswert (Mittelwert) dieser Funktion bezüglich der Zufallsvariablen

$$\langle f(\boldsymbol{x}) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(\boldsymbol{x})\, w(\boldsymbol{x})\, d^N x\,.$$

Insbesondere bezeichnet

$$\langle x_i^n \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} x_i^n\, w(\boldsymbol{x})\, d^N x$$

das n-te Moment ($n \in \mathbb{N}$) der Zufallsvariablen x_i, mit $\langle x_i \rangle$ als zugehörigem Mittelwert und $(\Delta x_i)^2 = \langle (x_i - \langle x_i \rangle)^2 \rangle$ als Varianz (Schwankungsquadrat). Schließlich definieren wir noch die charakteristische Funktion der Wahrscheinlichkeitsdichte $w(\boldsymbol{x})$ gemäß

$$\chi(\boldsymbol{k}) = \langle e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, w(\boldsymbol{x})\, d^N x\,,$$

so dass wir umgekehrt die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(\boldsymbol{x})$ als Fouriertransformierte der charakteristischen Funktion $\chi(\boldsymbol{k})$ über

$$w(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, \chi(\boldsymbol{k})\, d^N k$$

erhalten.

a) Ausgehend von den Zufallsvariablen $\boldsymbol{x}$ läßt sich die Funktion $\overline{f} = f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ ebenfalls als Zufallsvariable interpretieren. Zeigen Sie mit Hilfe der charakteristischen Funktion, dass sich deren Wahrscheinlichkeitsdichte $\overline{w}(\overline{f})$ über

$$\overline{w}(\overline{f}) = \langle \delta(\overline{f} - f(\boldsymbol{x})) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \delta(\overline{f} - f(\boldsymbol{x}))\, w(\boldsymbol{x})\, d^N x$$

ergibt.

(2 Punkte)

b) In dieser Teilaufgabe beschränken wir uns der Einfachheit halber auf den eindimensionalen Fall mit $x \in \mathbb{R}$ als einziger Zufallsvariablen und $w(x)$ als zugehöriger Wahrscheinlichkeitsdichte. Zeigen Sie, dass sich die charakteristische Funktion $\chi(k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ unter der Voraussetzung, dass alle Momente $\langle x^n \rangle$ existieren, als Potenzreihe

$$\chi(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle$$

schreiben lässt. Die sogenannten Kumulanten C_n ($n \in \mathbb{N}$) der Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x)$ sind im Gegensatz dazu über die Potenzreihenentwicklung des Logarithmus der charakteristischen Funktion definiert:

$$\ln(\chi(k)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} C_n \, .$$

Zeigen Sie, dass sich die ersten drei Kumulanten gemäß

$$\begin{aligned} C_1 &= \langle x \rangle \, , \\ C_2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = (\Delta x)^2 \, , \\ C_3 &= \langle x^3 \rangle - 3\langle x^2 \rangle \langle x \rangle + 2\langle x \rangle^3 \end{aligned}$$

aus den ersten drei Momenten der Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x)$ bestimmen lassen.

(2 Punkte)

c) Im Folgenden betrachten wir wieder den allgemeinen Fall N verschiedener Zufallsvariablen und definieren die sogenannte Kovarianzmatrix

$$V_{ik} = \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_k - \langle x_k \rangle) \rangle \, ,$$

deren Diagonalelemente den Varianzen $(\Delta x_i)^2$ entsprechen. Die Nichtdiagonalelemente der Kovarianzmatrix sind ein Maß dafür, inwieweit die Fluktuationen der Zufallsvariablen x_i und x_k um den Mittelwert miteinander korreliert sind. Zeigen Sie, dass für eine Wahrscheinlichkeitsdichte der Form $w(\boldsymbol{x}) = w_1(x_1)\, \tilde{w}(x_2, \ldots, x_N)$ alle Elemente V_{1k} ($k \in \{2, \ldots, N\}$) verschwinden.

(1 Punkt)

d) Wir kommen nun zum Beweis des zentralen Grenzwertsatzes. Dazu nehmen wir an, dass die einzelnen Zufallsvariablen x_i die verschiedenen Wahrscheinlichkeitsdichten $w_i(x_i)$ besitzen und vollständig unkorreliert sind, d.h. die Gesamtwahrscheinlichkeitsdichte ergibt sich über $w(\boldsymbol{x}) = w_1(x_1)\, w_2(x_2) \ldots w_N(x_N)$.

Der zentrale Grenzwertsatz sagt aus, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $\overline{w}(\overline{y}) = \langle \delta(\overline{y} - y(\boldsymbol{x})) \rangle$ des Mittelwerts $y(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$ der verschiedenen Zufallsvariablen für große N gegen die Gaußfunktion

$$\bar{w}(\bar{y}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi(\Delta \bar{y})^2}} \, e^{-\frac{(\bar{y} - \langle \bar{y} \rangle)^2}{2(\Delta \bar{y})^2}} \quad (N \gg 1) \tag{6}$$

konvergiert. Der Mittelwert und die Varianz dieser Gaußverteilung sind dabei durch $\langle \bar{y} \rangle = \langle y(\boldsymbol{x}) \rangle$ und $(\Delta \bar{y})^2 = \frac{1}{N}(\Delta y)^2$ geben, wobei

$$\langle y(\boldsymbol{x}) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \langle x_i \rangle \quad \text{und} \quad (\Delta y)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[\langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2 \right]$$

Das heißt, im Grenzfall $N \to \infty$ wird der Wert der Zufallsvariable quasi scharf, da für deren relative Schwankung

$$\frac{\Delta \bar{y}}{\langle \bar{y} \rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\Delta y}{\langle y(\boldsymbol{x}) \rangle} \to 0 \quad \text{für} \quad N \gg 1$$

gilt. Insbesondere strebt die Gaußfunktion (6) für $N \gg 1$ gegen die Delta-Funktion $\delta(\bar{y} - \langle \bar{y} \rangle)$.

Beweisen den zentralen Grenzwertsatz indem Sie Glg. (6) unter der Annahme ableiten, dass alle Momente $\langle x_i^n \rangle$ für die einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichten $w_i(x_i)$ existieren. Berücksichtigen sie in Ihrer Rechnung alle Terme in den höchsten beiden Ordnungen von $1/N$ und vernachlässigen sie alle höheren Ordnungen.

(3 Punkte)