Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik IV

WiSe 2022/23 **Blatt 8** **12.12.2022**

Aufgabe 17 *Klassische Approximation des Quantengases*

Ein Gas aus Quantenteilchen der Masse m bei einer Dichte n und Temperatur T kann durch ein klassisches Gas angenähert werden, wenn der mittlere Abstand d zwischen den Teilchen, definiert als

$$d = \frac{1}{n^{1/3}}, \tag{1}$$

viel größer ist als die thermische de Broglie-Wellenlänge, nämlich $d \gg \lambda_{\text{th}}$. Bestimmen Sie für ein Gas aus $N = 10^{19}$ Teilchen, die in einem Volumen $V = 1\ \text{cm}^3$ eingeschlossen sind, den entsprechenden Teilchenabstand d und vergleichen Sie ihn mit der de Broglie-Wellenlänge eines Wasserstoffmoleküls bei $T \approx 290$ K: $\lambda_{\text{th}} \approx 0.72 \times 10^{-8}$ cm. Prüfen Sie also, ob die Bedingung, das Gas als klassisches System zu behandeln, erfüllt ist.

(1 Punkt)

Aufgabe 18 *Entropie-Elastizität*

Ein einfaches Modell für die Entropie-Elasitzität betrachte man eine eindimensionale Kette, die aus N Elementen besteht. Jedes Element det Kette habe die Länge a und soll sich entweder parallel oder antiparallel zur Verbindung der beiden Endpunkte ausrichten können. n Elemente der Kette seien antiparallel zur Verbindung der beiden Endpunkte ausgerichtet, die restlichen $N - n$ Elemente seien parallel dazu ausgerichtet. Dabei soll $N \gg 1$, $n \gg 1$ und $N - n \gg 1$ gelten.

a) Berechnen Sie die Anzahl an Mikrozustände, die zu dem oben beschriebenen Zustand gehören. Geben Sie einen Zusammenhang zwischen N, n und der Länge x der Kette an.

(1 Punkt)

b) Wie hängt die Entropie des Systems von der Länge der Kette ab? Zeigen Sie, dass die Entropie mit der Länge der Kette abnimmt, d.h. $\partial_x S < 0$. Was bedeutet das für die Kette, wenn man annimmt, dass das System versucht, eine Konfiguration anzunehmen, bei der Entropie maximal ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 19 *Entropie des idealen Gases*

Betrachten Sie ein klassisches ideales Gases von Teilchen der Mass m. Die Hamiltonsche Funktion ist dann gegeben durch

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{N} p_i^2, \tag{2}$$

mit dem Impuls p_i des i-ten Teilchens.

a) Bestimmen Sie das Phasenraumvolumen $\Sigma(E)$ mit

$$\Sigma(E) = \frac{1}{h^{3N}} \int_{H(p,q)<E} \mathrm{d}^{3N}q \mathrm{d}^{3N}p, \tag{3}$$

und bestimmen Sie hieraus folgende Formel für die Entropie S des idealen Gases

$$S = Nk_B \ln\left[V\left(\frac{E}{N}\right)^{3/2}\right] + \frac{3}{2}Nk_B\left[1 + \ln\left(\frac{4\pi m}{3h^2}\right)\right] \tag{4}$$

Hinweis: Die Fläche der $3N$ dimensionalen Einheitskugel beträgt $2\frac{\pi^{3N/2}}{\Gamma(3N/2)}$.

(4 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass aus der Formel für die Entropie in Gl.(3) die kalorische Zustandgleichung $E = \frac{3}{2}k_BT$ sowie die thermische Zustandgleichung $pV = k_BNT$ folgen.

(2 Punkte)

Aufgabe 20 *Gibbssches Paradoxon*

Wir haben bereits gezeigt, dass die Entropie eines idealen Gases durch die folgende Formel

$$S = Nk_B \ln(Vu^{3/2}) + Ns_0, \tag{5}$$

gegeben ist, wobei $u = \frac{3}{2}k_BT$ und $s_0 = \frac{3k_B}{2}\left(1 + \ln\frac{4\pi m}{3h^2}\right)$. Betrachten Sie zwei ideale Gase mit N_1 bzw. N_2 Teilchen, die in zwei getrennten Volumen V_1 und V_2 bei gleicher Temperatur und gleicher Dichte gehalten werden.

a) Bestimmen Sie die Differenz der Entropie des kombinierten Systems, nachdem die Gase sich in einem gemeinsamen Volumen $V = V_1 + V_2$ vermischt haben, und zeigen Sie, dass diese Entropieänderung durch

$$\frac{\Delta S}{k_B} = N_1 \ln\frac{V}{V_1} + N_2 \ln\frac{V}{V_2}, \tag{6}$$

dargestellt wird, welche die Mischungsentropie darstellt.

(1 Punkt)

b) Das Gibbs-Paradoxon tritt auf, wenn man den Fall von zwei identischen idealen Gasen betrachtet. Da die Herleitung von Gl.(5) unabhängig von der Identität der Gase ist, würde die Verbindung der beiden Systeme auch zu einer Erhöhung der Entropie führen. Dies ist ein verhängnisvolles Ergebnis, da es bedeutet, dass die Entropie eines Gases von seiner Geschichte abhängt und daher nicht nur eine Funktion des thermodynamischen

Zustands des Gases sein kann. Gibbs löste dieses Paradoxon, indem er postulierte, dass der Ausdruck für $\Sigma(E)$, die Anzahl der Zustände unterhalb der Energie E, unvollständig ist und durch $N!$ geteilt werden sollte. Zeigen Sie, dass die Entropie des idealen Gases dann wie folgt lautet

$$S = Nk_B \ln \left[\frac{V}{N} u^{3/2} \right] + \frac{3}{2} Nk_B \left[\frac{5}{3} + \ln \left(\frac{4\pi m}{3h^2} \right) \right]. \tag{7}$$

(1 Punkt)

c) Berechnen Sie die Mischungsentropie für den Fall unterschiedlicher Gase und dann für identische Gase und zeigen Sie, dass Gl.(6) das Gibbs-Paradoxon l"ost.

(1 Punkt)